**数学思想方法**

**一、单选题**

1．若关于*x*的不等式的解集中恰有4个整数，则实数*m*的取值范围为（       ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【解析】讨论*m*与2的大小关系，求得不等式的解集， 根据解集中恰有4个整数，确定*m*的取值范围.

【详解】不等式即 ，

当时，不等式解集为，此时要使解集中恰有4个整数，

这四个整数只能是3,4,5,6，故，

当时，不等式解集为 ，此时不符合题意；

当 时，不等式解集为，此时要使解集中恰有4个整数，

这四个整数只能是 ，故，，

故实数*m*的取值范围为，

故选：C

2．若实数*x*，*y*满足，则的取值范围（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【解析】设，求出，再根据不等式的性质即可得出答案.

【详解】解：设，

则，解得，

故，

又因，

所以，

所以.

故选：A.

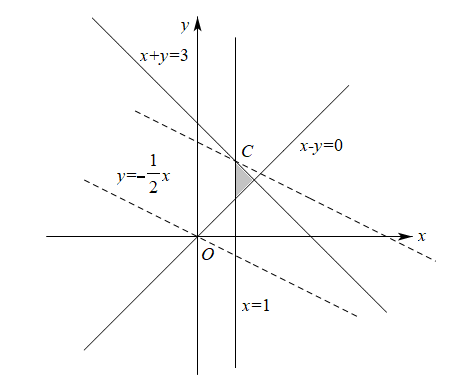
3．已知点*A*的坐标满足线性约束条件，，，则的最大值为（       ）

A．10 B．9 C．8 D．6

【答案】A

【解析】作出可行域，由数量积的坐标运算转化为求的最大值，利用数形结合求解.

【详解】作出可行域如图，



, 令，

由图可知，当过点       *C*时，有最大值，

联立，解得,

所以,

故选：A

4．已知正数*a*，*b*和实数*t*满足，若存在最大值，则的取值范围是（       ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【解析】，分，和三种情况讨论，结合基本不等式即可得出答案.

【详解】解：，

①当，即时，，则的最大值为1，符合题意；

②当，即时，

则，

所以，所以，当且仅当时取等号，

此时有最小值，无最大值，与题意矛盾；

③当，即时，

则，

当，即时，

，所以，

不妨设，则，即，

故，此时无最大值，与题意矛盾；

当，即时，

，所以，当且仅当时取等号，

此时有最大值，符合题意；

当，即时，

恒不成立，不符题意，

综上所述，若存在最大值，.

故选：C.

5．为贯彻教育部关于全面推进素质教育的精神，某学校推行体育选修课，甲、乙、丙、丁四人分别从太极拳、足球、击剑、游泳四门课程中选择一门课程作为选修课，他们分别有以下要求：

甲：我不选太极拳和足球；

乙：我不选太极拳和游泳；

丙：我的要求和乙一样；

丁：如果乙不选足球，我就不选太极拳．

已知每门课程都有人选择，且都满足四个人的要求，据此推断选击剑的是（       ）

A．甲 B．乙 C．丙 D．丁

【答案】C

【解析】根据题意可知乙、丙只能从足球和击剑中选，分乙选足球，丙选击剑和乙选击剑，丙选足球，两种情况讨论，从而可得出答案.

【详解】解：根据题意乙、丙只能从足球和击剑中选，

若乙选足球，则丙选击剑，

则甲只能选游泳，故丁只能选太极拳，符合题意；

若乙选击剑，则丙选足球，

此时甲丁都不能选太极拳，只有游泳可选，则无法满足条件，故不符合题意，

综上所述选击剑的是丙.

故选：C.

**二、多选题**

6．当*a*，时，下列不等关系不成立的是（       ）

A． B． C． D．

【答案】ABD

【解析】应用特殊值法：令判断A，令判断B，令判断D，由重要不等式判断C.

【详解】A：当时，显然不成立；

B：当时，不成立；

C：由重要不等式知：当且仅当时等号成立；

D：当时，不成立.

故选：ABD

7．已知，，且，则（       ）

A． B．

C． D．

【答案】BD

【解析】利用对数的运算及基本不等式判断A；利用基本不等式及完全平方和的公式可判断BC； 利用基本不等式“1”的代换可判断D.

【详解】对于A，∵，∴，∴，当且仅当时等号成立，故A错误；

对于B，，当且仅当时等号成立，故B正确；

对于C，∵，∴，当且仅当时等号成立，故C错误.

对于D，，当且仅当时等号成立，故D正确；

故选：BD

8．已知，，则下列选项一定正确的是（       ）

A．

B．的最大值为

C．的最大值为2

D．

【答案】BD

【解析】根据题意，求得*a*，*b*的范围，整理可得，利用基本不等式可判断AB；利用二次函数的性质可判断C；利用基本不等式“1”的代换可判断D.

【详解】，，，，

对于A，因为，所以，

当且仅当，即时等号成立，故A错误；

对于B， 因为，所以，当且仅当，即时等号成立，故B正确；

对于C，因为，所以，，，即，故C错误；

对于D，，当且仅当，即，时等号成立，，故D正确

故选：BD

9．下列命题为真命题的是（       ）

A．若，则

B．若，则

C．若，则

D．若，则

【答案】ABD

【解析】利用不等式的性质可判断ABD选项；举反例可判断C选项.

【详解】A选项，不等式两边同乘，得，为真命题.

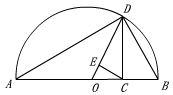
B选项，，则，利用同向可加性，可知，为真命题.

C选项，取，满足，但，为假命题.

D选项，，，故，又，利用同向可乘性，可知，为真命题.

故选：ABD

10．《几何原本》中的几何代数法是以几何方法研究代数问题，这种方法是后西方数学家处理问题的重要依据，通过这一原理，很多代数公理或定理都能够通过图形实现证明，也称之为无字证明．现有图形如图所示，为线段上的点，且，，为的中点，以为直径作半圆．过点作的垂线交半圆于，连接，，，过点作的垂线，垂足为．则该图形可以完成的所有的无字证明为（       ）



A． B．

C． D．

【答案】AC

【解析】分别在和中，利用射影定理和、判定选项A、C正确.

【详解】，，

根据图形，在中，由射影定理得，所以，

由，且，得：（，），当且仅当时取等号，即A正确；

在中，同理得，所以，

又，所以（，），当且仅当时取等号，即C正确；

故选：AC.

**三、双空题**

11．已知命题：，，则命题的否定为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_；若命题为真命题，则的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】     ，     

【解析】利用特称命题的否定为全称命题可写出命题的否定；

命题为真，将已知变形为，使得成立，即，利用基本不等式求得最小值即可得解.

【详解】命题：，为特称命题，特称命题的否定为全称命题，

所以命题的否定为，

命题为真，即，成立，

则，使得成立，所以

又，当且仅当，即时等号成立，，即

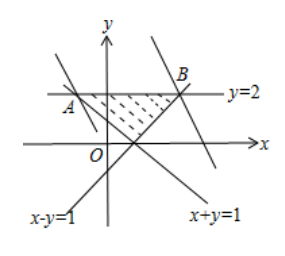
所以的取值范围为

故答案为：，；

12．变量满足约束条件，则目标函数的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_，最小值是\_\_\_\_\_.

【答案】          

【解析】根据线性规划先求出的取值范围，然后利用指数函数的单调性求出结果.

【详解】

如图，要求的最值，即求出的范围，

令，则，

由线性规划得当，时的最大值为8，

当，时的最小值为0，

所以目标函数的最小值为，最大值为，

故答案为：1；

13．已知正数满足，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_时，有最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】          

【解析】正数满足，利用“1”的代换，将已知转化为，再利用基本不等式求解即可.

【详解】因为正数满足，

，

当且仅当，即，时取等号，所以所求的最小值为．

故答案为：，

【点评】易错点睛：利用基本不等式求最值时，要注意其必须满足的三个条件：

（1）“一正”就是各项必须为正数；

（2）“二定”就是要求和的最小值，必须把构成和的二项之积转化成定值；要求积的最大值，则必须把构成积的因式的和转化成定值；

（3）“三相等”是利用基本不等式求最值时，必须验证等号成立的条件，若不能取等号则这个定值就不是所求的最值，这也是最容易发生错误的地方.

14．若不等式的解集为 ，不等式的解集为，不等式的解集为，则\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_．

【答案】          

【解析】利用一元二次不等式的解法可得，，求出，根据韦达定理求得的值，从而可得结果.

【详解】不等式变形得：，

得：，即，

不等式变形得：，

得：，即，

∴，即不等式的解集为，

∴由韦达定理可得，，

则，

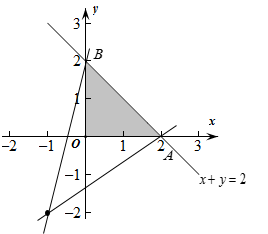
故答案为．

15．已知实数满足，则的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_；若不等式恒成立，则实数的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】     4     

【解析】作出可行域，的几何意义为可行域内的的点与点连线的斜率，转动过的直线，找到斜率的最大值计算即可；恒成立，分类讨论和两种情况，得出结果求并集.

【详解】解：由约束条件作出可行域如图：



表示可行域内的的点与点连线的斜率，则斜率的最大值为与点连线的斜率，即，故的最大值为4；

设直线：，则直线过定点，所以时，恒成立；当时，若恒成立，只需斜率，即.则恒成立的的范围为.

故答案为：4；.

【点评】结论点睛：（1）线性规划问题，表示可行域内的的点与点连线的斜率；（2）直线，当时，的可行域在直线的左上方或左下方，的可行域在直线的右上方或右下方.

**四、填空题**

16．若对任意的，都有，则实数的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】对任意的，都有等价于对任意的，都有， 由题意可知，函数的图象在函数的图象的上方，结合图象列式即可求解

【详解】对任意的，都有等价于对任意的，都有，

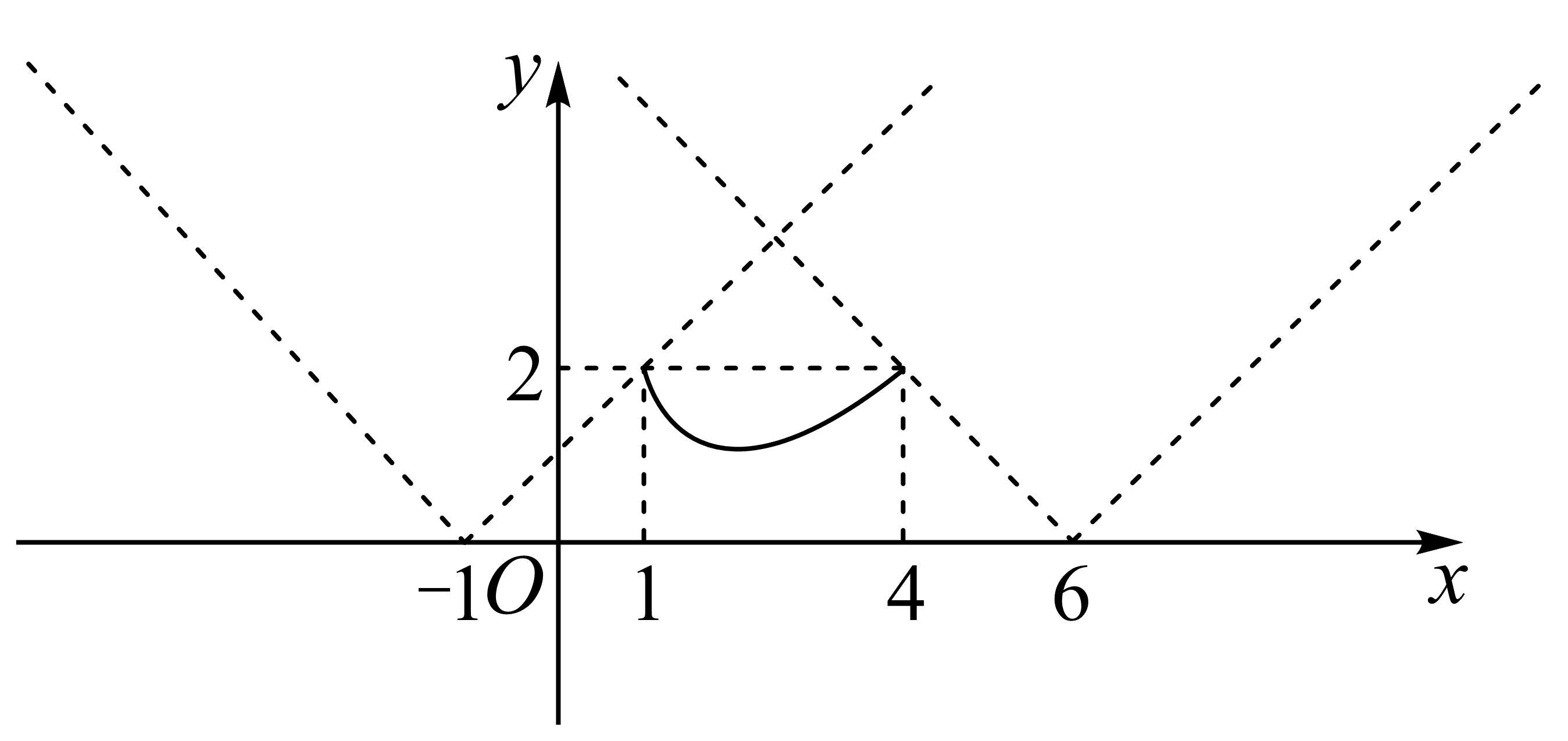
作出函数的大致图象，如图中实线所示，由题意可知，函数的图象在函数的图象的上方，

①若，显然不符合题意；

②若，当直线经过点时，，所以要使的图象在的图象的上方，需；

③若，当直线经过点时，，所以要使的图象在的图象的上方，需.

综上，实数的取值范围为.

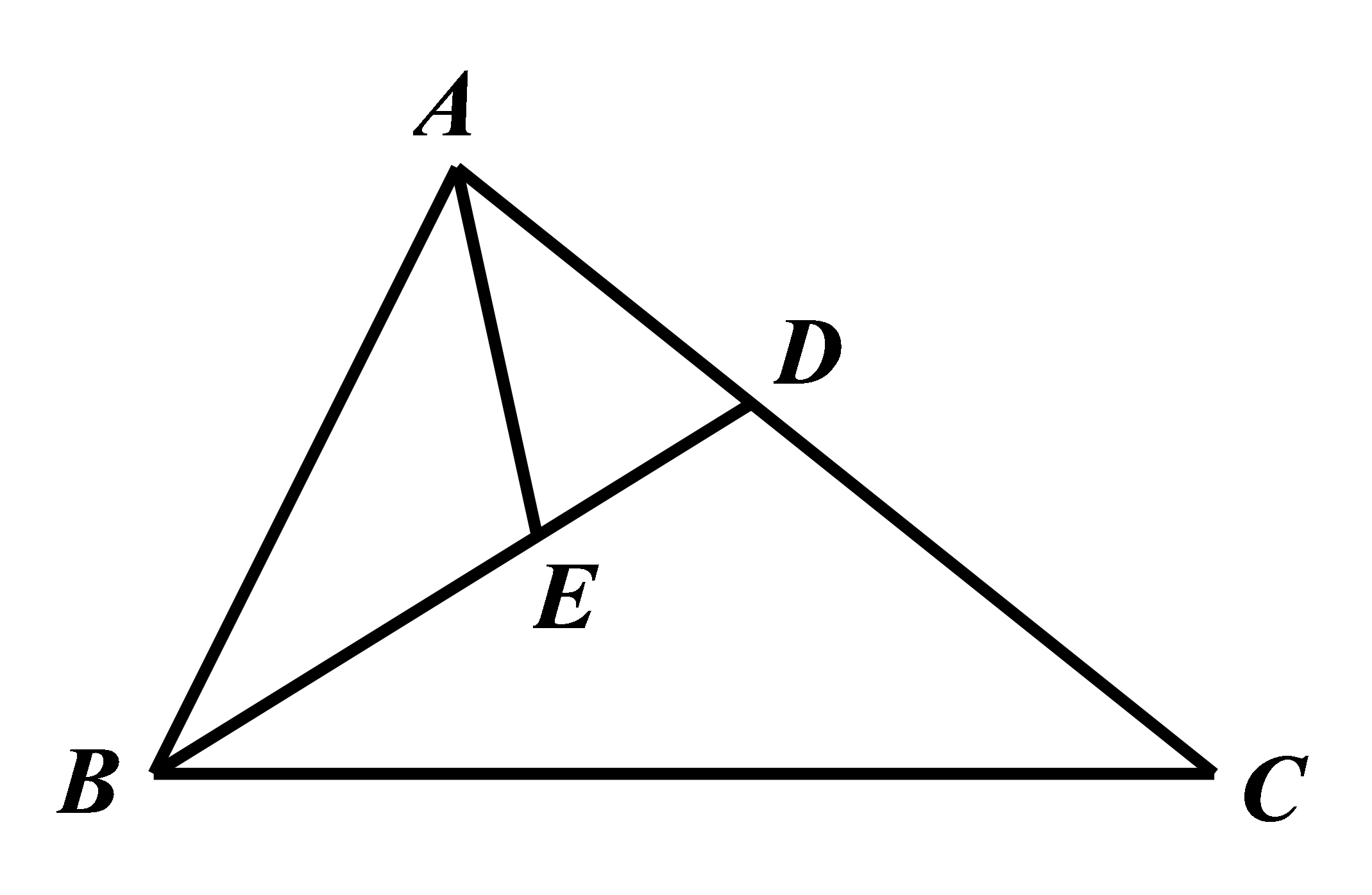


故答案为：

17．已知的面积为，分别是线段上的点（不包含端点），且，，若的面积是，则的最小值是\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】由可得；由可得，进而得到；利用基本不等式可求得结果.

【详解】

，，则，；

，，则，；

，，即；

由题意知：，，

（当且仅当，即，时取等号），

的最小值为.

故答案为：.

18．在直角坐标平面内，曲线所围图形的面积为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】12

【解析】通过与，1，与0的大小，讨论画出曲线围成的图形，然后求解面积即可．

【详解】解：①当，时，曲线化为：，

②当，时，曲线化为：，

③当，时，曲线化为：，

④当，时，曲线化为：，

⑤当，时，曲线化为：，

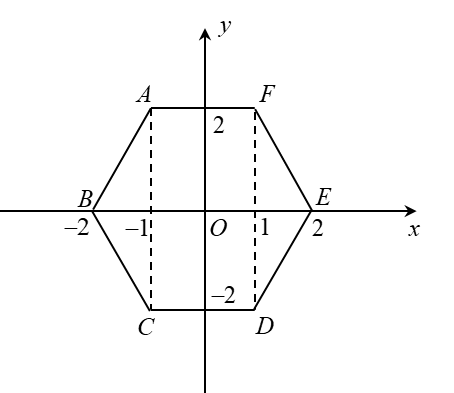
⑥当，时，曲线化为：，

曲线围成的图形如图：

正六边形的面积为，

所以曲线所围图形的面积为为.

故答案为：12.



19．若实数满足，则的最大值为\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】由约束条件可得可行域，将问题转化为在轴截距最大的问题，采用数形结合的方式可求得结果.

【详解】由约束条件可得可行域如下图阴影部分所示，



由得：，

则取最大值时，在轴截距最大；

由图形可知：当过点时，在轴截距最大，

由得：，即，.

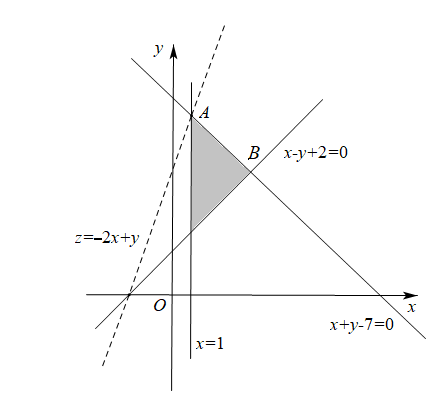
故答案为：.

20．设变量，满足约束条件，则的取值范围为\_\_\_\_\_\_

【答案】

【解析】作出可行域，根据简单线性规划求最值即可得解.

【详解】作可行域如图，



联立解得，联立解得，

由可得，

由图形及为上的截距可知，当过*A*时，，

当过*B*时，，

所以，

故答案为：

**五、解答题**

21．在中有余弦定理：．拓展到空间，类比三角形的余弦定理，写出斜三棱柱的3个侧面面积与其中两个侧面所成二面角之间的关系式，并证明．

【答案】，证明见解析

【解析】先利用类比思想得到结论，再借助余弦定理进行证明.

【详解】关系式为，

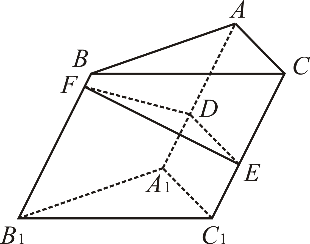
其中*θ*为侧面*ABB1A1*与侧面*BCC1B1*所成二面角的平面角．

证明如下：

如图，作斜三棱柱的直截面*DFE*，

则为面与面所成二面角的平面角，

设为*θ*，在中有余弦定理：



，同乘以，

得

即．

22．设函数.

(1)若，解不等式；

(2)若，解关于*x*的不等式

【答案】(1)或；

(2)详见解析.

【解析】（1）利用二次不等式的解法即可得解；

（2）将原不等式变形为，对实数的取值进行分类讨论，结合二次不等式的解法即可得解.

(1)

当时，由，解得或，

故当时，不等式的解集为或.

(2)

由可得，

当时，方程的两根分别为，.

当时，，解原不等式可得；

当时，原不等式即为，该不等式的解集为；

当时，，解原不等式可得.

综上所述，当时，原不等式的解集为；当时，原不等式的解集为；当时，原不等式的解集为.

23．已知函数．

(1)若对任意，恒成立，求实数的值；

(2)若，试解关于的不等式．

【答案】(1)；

(2)答案见解析.

【解析】（1）讨论的范围，根据不等式恒成立并结合二次函数的性质求的值；

（2）应用分类讨论求解含参一元二次不等式的解集即可.

(1)

当时，不能恒成立，

当时，有，显然不恒成立，

所以，得：；

(2)

由得：，

当时，不等式即为，故不等式的解为；

当时，不等式解为；

当时，不等式解为

故当时，解集为；

当时，解集为；

当时，解集为.

24．已知函数．

(1)解不等式；

(2)若恒成立，求实数*m*的取值范围．

【答案】(1)

(2)

【解析】（1）分段讨论解含绝对值的不等式

（2）作出函数图象，数形结合求解

(1)

由题意得，由可得或或，

解得或，所以不等式的解集为．

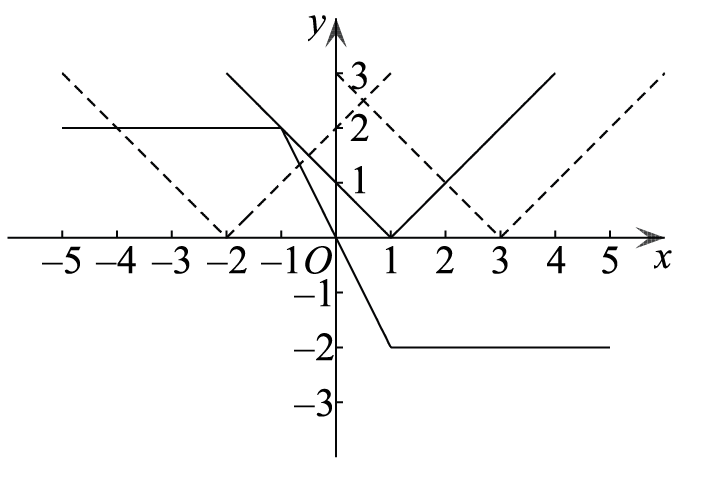
(2)

如图所示，函数图象是顶点为，开口向上的“V”型折线，其左支过点时，．

①当时，函数图象在函数的图象上方（有1个交点），不等式，显然成立；

②当时，函数图象有部分在函数的图象下方，不恒成立．

综上所述，实数*m*的取值范围为．



25．解关于*x*的不等式：.

【答案】答案见解析

【解析】求出对应方程的根，讨论方程的根的大小即可得出答案.

【详解】解：即，

则对应方程的根为，

①当或时，原不等式的解集为，

②当或时，原不等式的解集为，

③当时，原不等式的解集为.

