**专题25 圆锥曲线的光学性质及其应用 微点1 椭圆的光学性质及其应用**

专题25 圆锥曲线的光学性质及其应用

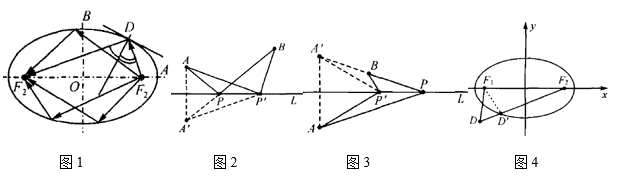
微点1 椭圆的光学性质及其应用

【微点综述】

从近几年圆锥曲线的命题风格看，既注重知识又注重能力，既突出圆锥曲线的本质特征．圆锥曲线的光学性质暗含了几何图形对称性这一重要几何性质，而切线、过中心和过焦点的弦的问题又是考查圆锥曲线定义和直线与圆锥曲线位置关系的常选角度，因此，熟练掌握圆锥曲线的光学性质并有意识地应用其解题，则可以提高我们解题的效率．因此在高考数学复习中，通过让学生研究圆锥曲线的光学性质和新定义的相关问题，快速提高学生的数学解题能力，增强学生的信心，备战高考．本专题我们来研究椭圆的光学性质及其应用．

一、椭圆的光学性质

【定理】从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点（如图1）．

****

椭圆的这种光学特性常被用来设计一些照明设备或聚热装置．例如电影放映机的聚光灯泡的反射面是椭圆面，灯丝在一个焦点上影片门在另一个焦点上．

二、椭圆光学性质的证明

椭圆光学性质的证明，分几何证法和代数证法．几何证明需要用到以下几个引理：

1．几个引理

【引理1】若点在直线的同侧，设点是直线上到两点距离之和最小的点，当且仅当点是点关于直线的对称点与点连线和直线的交点．

证明：在直线上任取一个不同于点的点，则，根据三角形两边之和大于第三边，有，即，得证．．

【引理2】若点在直线的两侧，且点到直线的距离不相等，设点是直线上到点距离之差最大的点，即最大，当且仅当点是点关于直线的对称点与点连线的延长线和直线的交点．

证明：在直线上任取一个不同于点的点，则，根据三角形两边之差小于第三边，有，即，得证．

【引理3】设椭圆方程为，分别是其左、右焦点，若点在椭圆外，则．

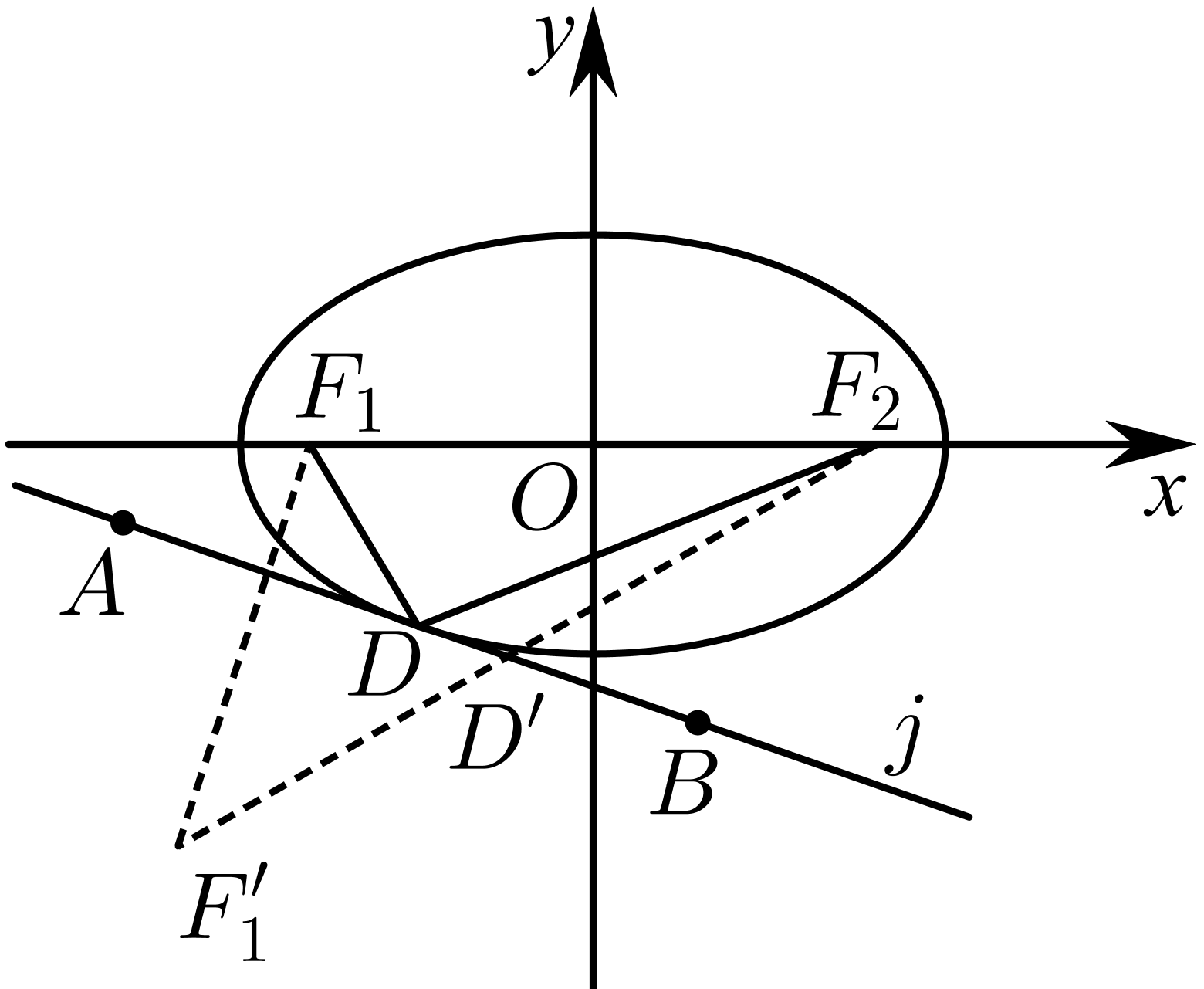
证明：连结交椭圆于点，则，根据三角形两边之和大于第三边，有，即（其实若点在椭圆内，则有，证明方法类似）．

下面我们把椭圆的光学性质定理1转化成数学命题例1，并给出几何证法和代数证法．

2．椭圆光学性质的几何证明

例1

1．已知：如图，椭圆，分别是其左、右焦点，是过椭圆上一点的切线，是直线上的两点（不同于点）．求证：．（人射角等于反射角）



3．椭圆光学性质的代数证明

例1的证明（代数法）：要证明反射光线经过，只需要证明直线与的夹角和与的夹角相等即可．设，即证．

由两边对求导得切线的斜率，

，

又，由可得

，

．

即直线到对于的角等于直线到直线的角，所以经过左焦点的入射光线射到椭圆壁经椭圆壁反射后的反射光线为，即反射光线经过右焦点．故命题得证．

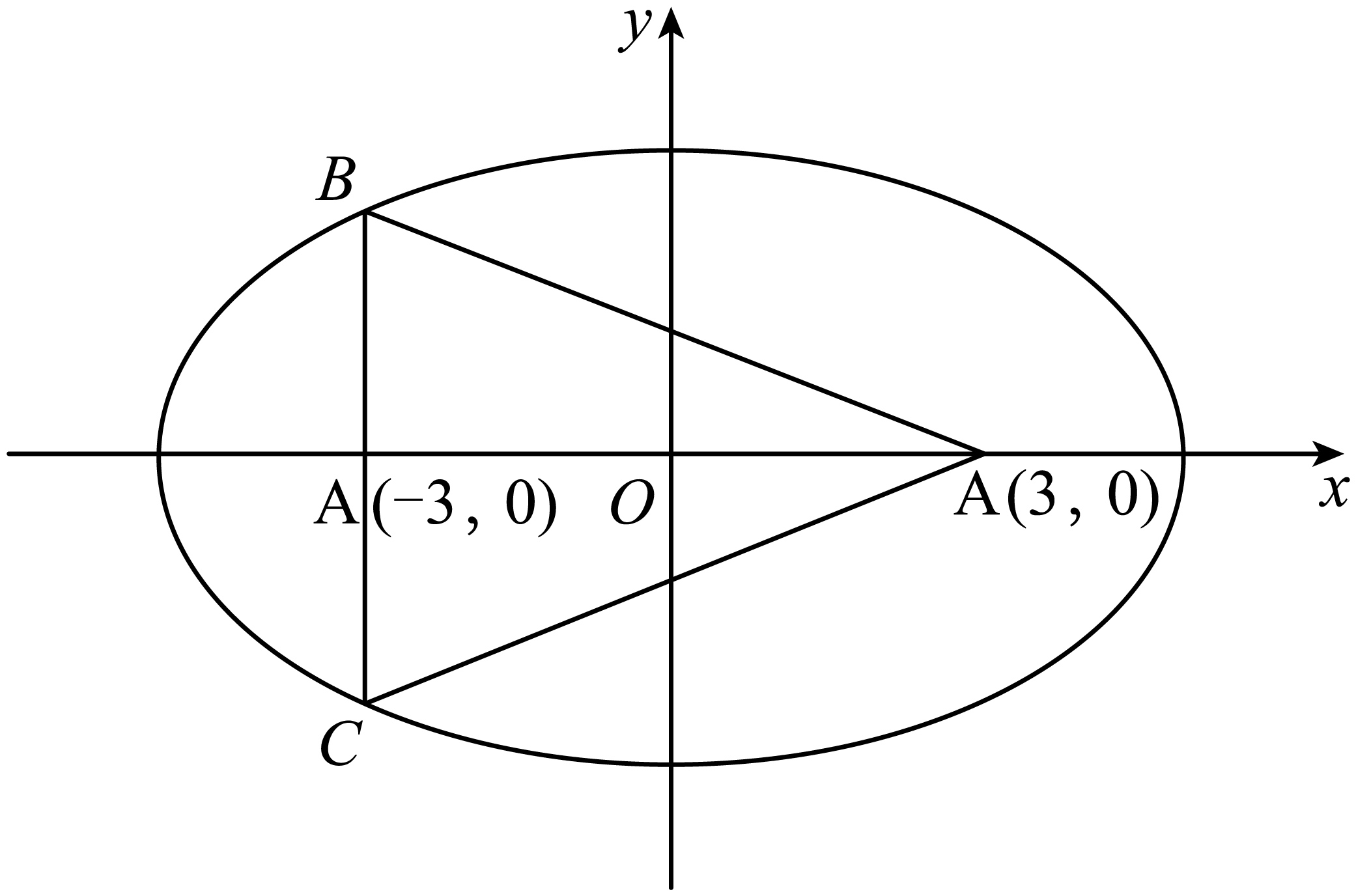
上面我们用几何法和代数法怎么了圆锥曲线的光学性质，实际上，如果把光源改为声源，上述结论仍成立，即圆锥曲线也具有跟光学性质相似的声学性质．

三、椭圆光学（声学）性质的应用

1．解决入射与反射问题

例2

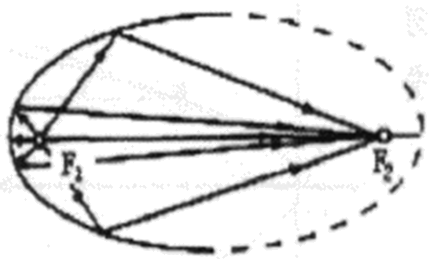
2．已知椭圆方程为，若有光束自焦点射出，经二次反射回到点．设二次反射点为，如图所示△的周长为多少?



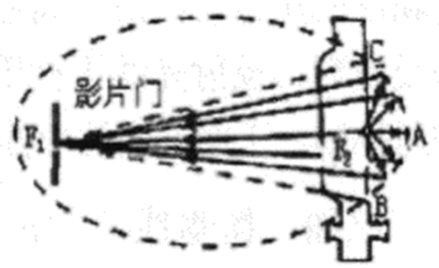
2．椭圆的光学（声学）性质在实际生活中的应用

圆锥曲线的光学（声学）性质在实际生活中有着广泛的应用，下面各举一些例子进行说明．

从椭圆的一个焦点发出的光源(或声源)，经过椭圆反射后，会交于椭圆的另一个焦点上(见图)．椭圆的这种光学性质被人们广泛地应用于各种设计中，如北京天坛的回音壁也是根据这个原理建造的．这里还有一个传说，据说二战时期德军有一个椭圆面的洞穴，是用来关押俘虏的，曾经有一次被关押的俘虏在洞中秘密商讨逃跑的计划，可每次逃跑的计划都被敌人识破，百思不得其解，于是以为俘虏中出现了内奸．其实，俘虏中并没有出现内奸，而是俘虏们商讨的地方正好位于椭圆的一个焦点位置上，而看守却位于椭圆的另一个焦点位置，虽然商讨的声音很小声，但经椭圆面墙壁反射后集中看守所在的位置上，所以看守可以听得清清楚楚，于是逃跑计划总是无法实施．



又如，电影放映机的聚光灯有一个反射、镜，见图，它的形状是旋转椭圆面．为了使片门(电影胶片通过的地方)处获得最强的光线，灯丝F2与片门F应位于椭圆的两个焦点处，这就是利用椭圆光学性质的又一个实例．



例3

3．椭圆有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点出发的光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，今有一个水平放置的椭圆形台球盘，点，是它的焦点，长轴长为，焦距为，静放在点的小球（小球的半径不计），从点沿直线出发，经椭圆壁反弹后第一次回到点时，小球经过的路程可以是（    ）

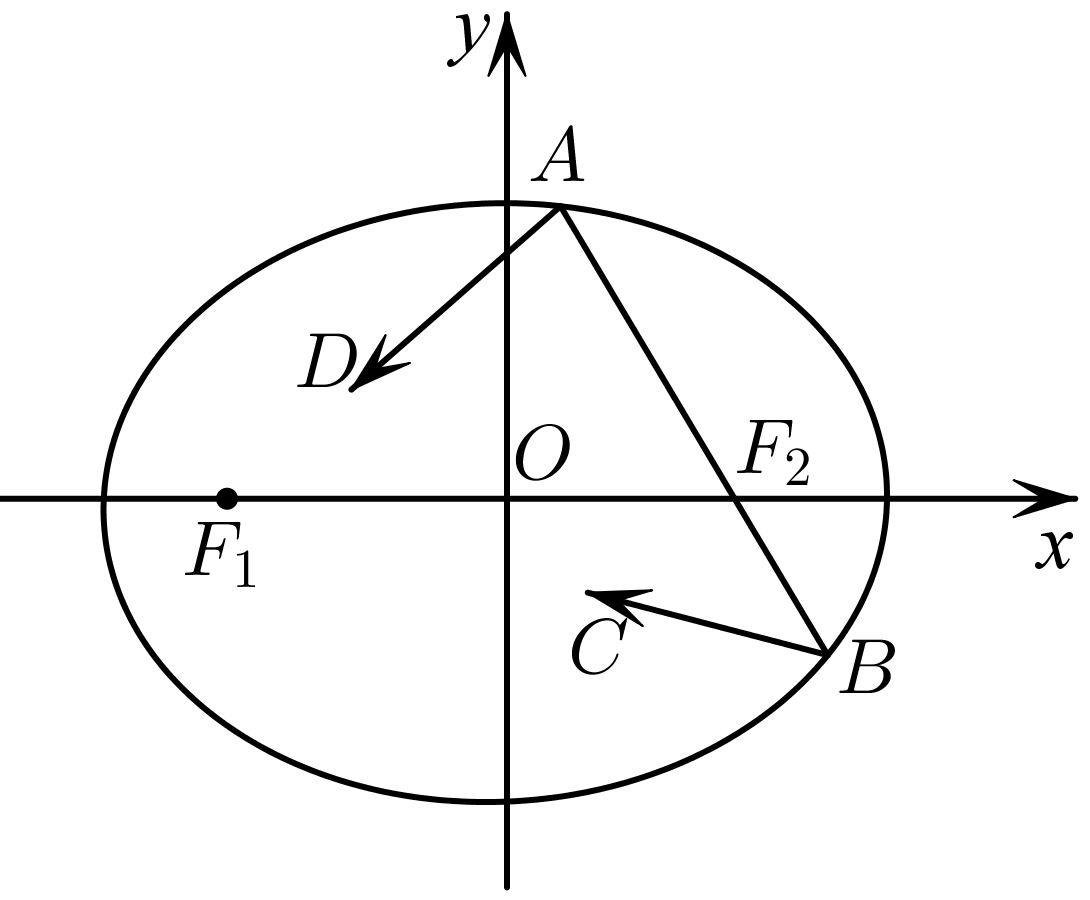
A． B． C． D．

例4

4．椭圆有如下光学性质：从椭圆的一个焦点射出的光线，经椭圆反射，其反射光线必经过椭圆的另一个焦点，已知椭圆长轴长为，焦距为，若一条光线从椭圆的左焦点出发，第一次回到该焦点所经过的路程为，则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_.

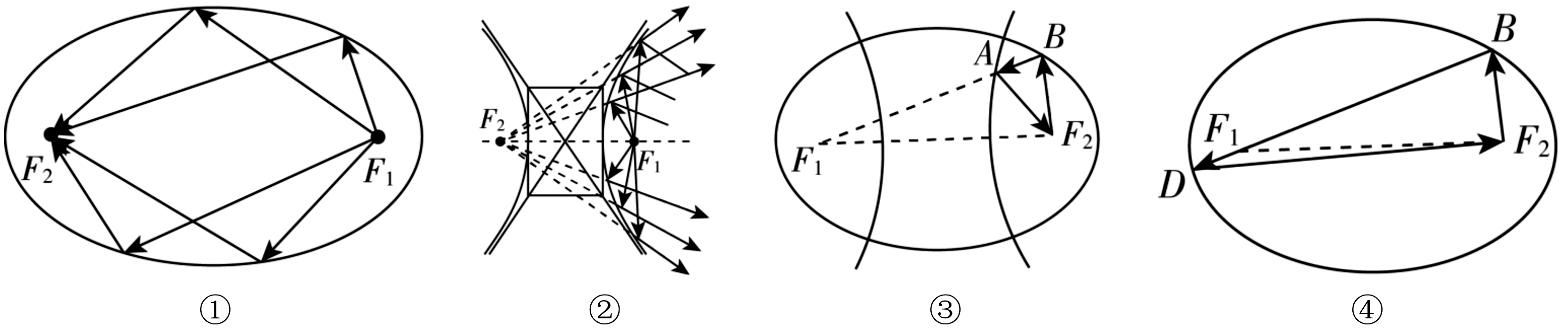
例5（2022·海南中学高三月考）

5．古希腊数学家阿波罗尼奥斯在研究圆锥曲线时发现了它们的光学性质．比如椭圆，他发现如果把椭圆焦点*F*一侧做成镜面，并在*F*处放置光源，那么经过椭圆镜面反射的光线全部都会经过另一个焦点．设椭圆方程为其左、右焦点，若从右焦点发出的光线经椭圆上的点*A*和点*B*反射后，满足，则该椭圆的离心率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



例6（2022·安徽·安庆一中高三月考）

6．如图①，椭圆的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点.如图②，双曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线的反向延长线经过双曲线的另一个焦点.如图③，一个光学装置由有公共焦点的椭圆与双曲线构成，已知与的离心率之比为.现一光线从右焦点发出，依次经与的反射，又回到了点，历时秒.将装置中的去掉，如图④，此光线从点发出，经两次反射后又回到了点，历时\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.秒



例7（2022·安徽·合肥市第八中学模拟预测）

7．生活中，椭圆有很多光学性质，如从椭圆的一个焦点出发的光线射到椭圆镜面后反射，反射光线经过另一个焦点.现椭圆*C*的焦点在*y*轴上，中心在坐标原点，从下焦点射出的光线经过椭圆镜面反射到上焦点，这束光线的总长度为4，且反射点与焦点构成的三角形面积最大值为，已知椭圆的离心率*e*.

(1)求椭圆*C*的标准方程；

(2)若从椭圆*C*中心*O*出发的两束光线*OM*、*ON*，分别穿过椭圆上的*A*、*B*点后射到直线上的*M*、*N*两点，若*AB*连线过椭圆的上焦点，试问，直线*BM*与直线*AN*能交于一定点吗？若能，求出此定点：若不能，请说明理由.

例8

8．欧几里得生活的时期人们就发现了椭圆有如下的光学性质：由椭圆一焦点射出的光线经椭圆内壁反射后必经过另一焦点现有一椭圆，长轴长为，从一个焦点发出的一条光线经椭圆内壁上一点反射之后恰好与轴垂直，且．

(1)求椭圆的标准方程；

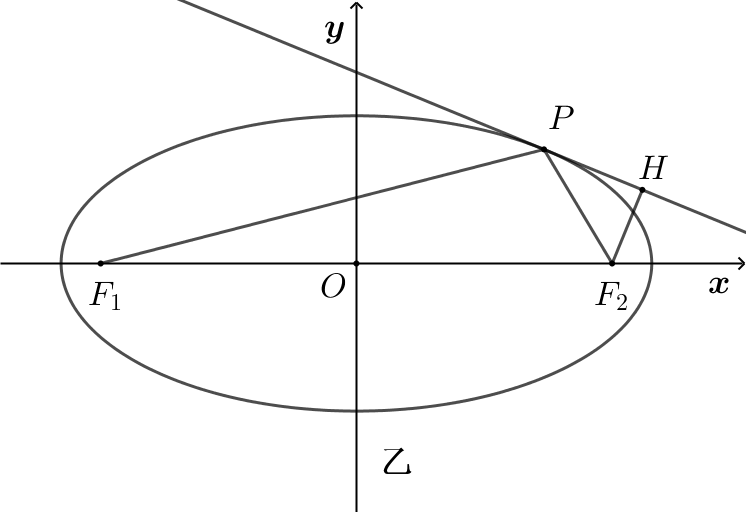
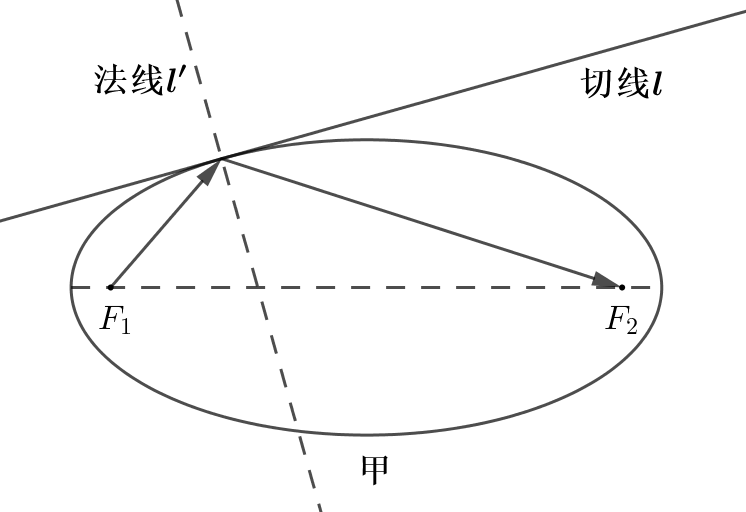
(2)已知为该椭圆的左顶点，若斜率为且不经过点的直线与椭圆交于，两点，记直线，的斜率分别为，且满足．

①证明：直线过定点；

②若，求的值．

例9（2022重庆巴蜀中学高三月考）

9．历史上第一个研究圆锥曲线的是梅纳库莫斯（公元前375年-325年），大约100年后，阿波罗尼斯更详尽、系统地研究了圆锥曲线，并且他还进一步研究了这些圆锥曲线的光学性质：如图甲，从椭圆的一个焦点出发的光线或声波，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点，其中法线表示与椭圆*C*的切线垂直且过相应切点的直线，如图乙，椭圆*C*的中心在坐标原点，焦点为，由发出的光经椭圆两次反射后回到经过的路程为．利用椭圆的光学性质解决以下问题：



（1）求椭圆*C*的离心率；

（2）点*P*是椭圆*C*上除顶点外的任意一点，椭圆在点*P*处的切线为在*l*上的射影*H*在圆上，求椭圆*C*的方程．

例10

10．雨过天晴时，我们常能见到天空的彩红，这种现象是阳光经空气中的水滴反射与折射综合产生的自然现象．为研究方便将水滴近似视为一个球体．且各光线在球的同一截面大圆内．

Ⅰ．如图1，入射光线经折射进入该球体内部，折射光线经一次内部反射形成反射光线，再折射出球体外得到折射光线．当 ∥时，则称为光线为虹；

Ⅱ．如图2，入射光线经折射进入该球体内部，折射光线经两次内部反射形成反射光线，．再折射出球体外得到折射光线，当 ∥时则称为光线为霓．

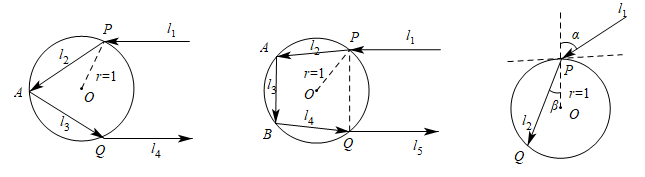


图1                         图2                               图3

可参考的物理光学反射与折射的知识，有如下定义与规律：

III．光被镜面反射时，过入射点与镜面垂直的直线称为法线，入射光线与反射光线与法线的夹角分别称为入射角与反射角，则入射角等于反射角；

IV．从介质1射入介质2发生折射时，入射角与折射角折射光线与法线的夹角的正弦之比叫做介质2相对介质1的折射角，即．

设球半径*r*=1．球为某种透光性较高的介质．空气相对该介质的折射率为．圆弧对光线入射或折射时，其反射镜面为过入射（或反射）点的圆切线，法线为过该点的半径所在直线．

（1）图3中，入射光线经入射点*P*进入球内得到折射光线，过*P*的圆切线为，过点*P*的半径所在直线为法线，设入射角，若球介质的折射率，求折射角大小；

（2）图1中，设初始入射光线的入射角为，球介质的折射率=1.5．折射光线为虹，求；

（3）图2中，设初始入射光线的入射角为，球介质的折射率，折射光线为霓，求．

【强化训练】

11．椭圆满足这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发射光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点.现在设有一个水平放置的椭圆形台球盘，满足方程：，点A、B是它的两个焦点，当静止的小球放在点A处，从点A沿直线出发，经椭圆壁反弹后，再回到点A时，小球经过的最短路程是.

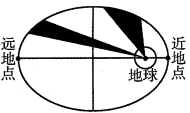
A．20 B．18

C．16 D．以上均有可能

12．椭圆满足这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发射光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．现在设有一个水平放置的椭圆形台球盘，满足方程：， 点*A*、*B*是它的两个焦点，当静止的小球放在点*A*处，从*A*点沿直线出发，经椭圆壁反弹后，再回到点*A*时，小球经过的最长路程是

A．20 B．18 C．16 D．14

13．人造地球卫星绕地球运行遵循开普勒行星运动定律:如图，卫星在以地球的中心为焦点的椭圆轨道上绕地球运行时，其运行速度是变化的，速度的变化服从面积守恒规律，即卫星的向径(卫星与地心的连线)在相同的时间内扫过的面积相等设该椭圆的长轴长、焦距分别为，.某同学根据所学知识，得到下列结论:



①卫星向径的取值范围是

②卫星向径的最小值与最大值的比值越大，椭圆轨道越扁

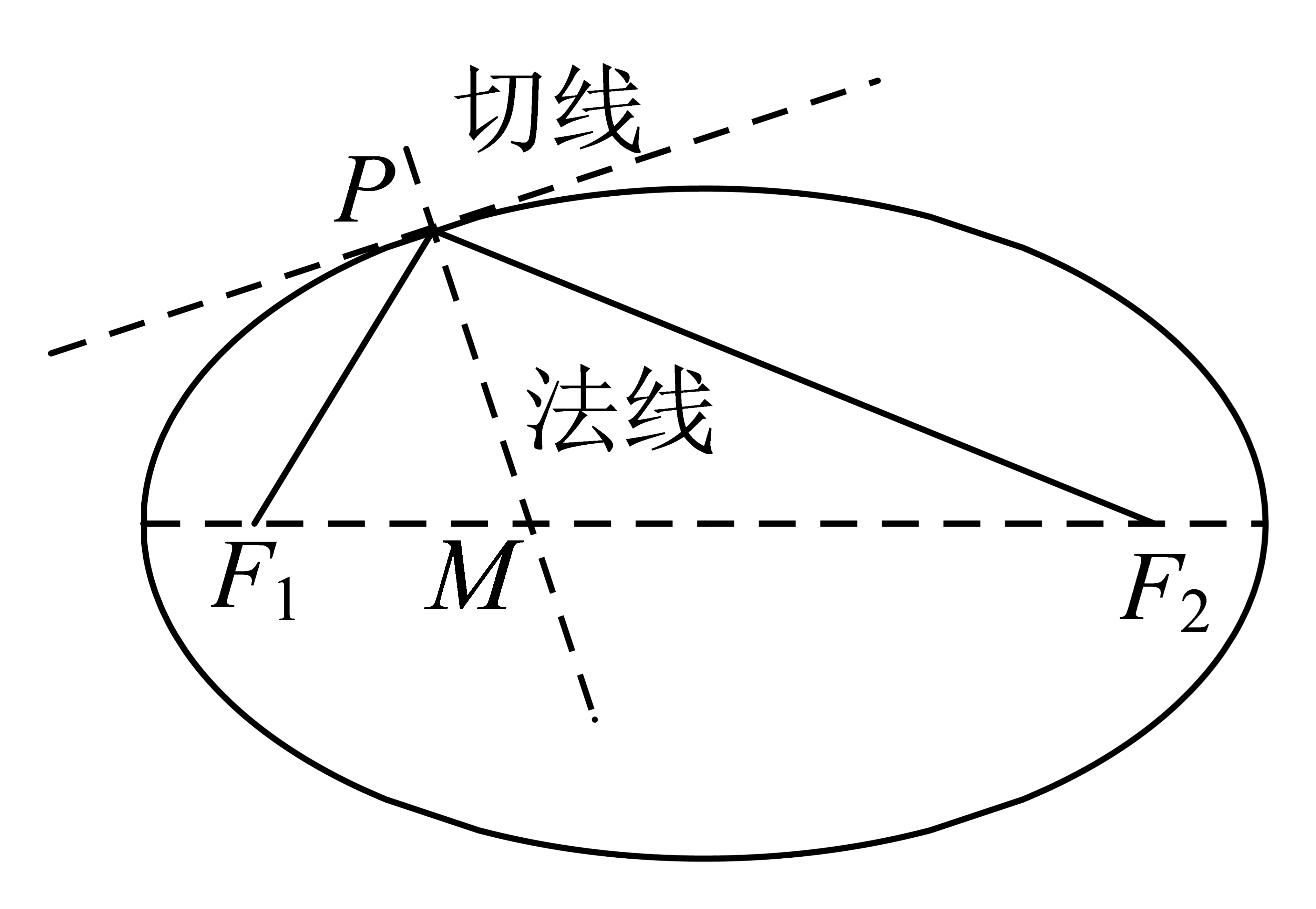
③卫星在左半椭圆弧的运行时间大于其在右半椭圆弧的运行时间

④卫星运行速度在近地点时最小，在远地点时最大

其中正确的结论是（    ）

A．①② B．①③ C．②④ D．①③④

14．如图所示，椭圆有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点出发的光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点.根据椭圆的光学性质解决下题：已知曲线的方程为，其左、右焦点分别是，，直线与椭圆切于点，且，过点且与直线垂直的直线与椭圆长轴交于点，则



A． B． C． D．

15．圆锥曲线具有丰富的光学性质，从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．直线*l*：与椭圆*C*：相切于点*P*，椭圆*C*的焦点为，，由光学性质知直线，与*l*的夹角相等，则的角平分线所在的直线的方程为（    ）

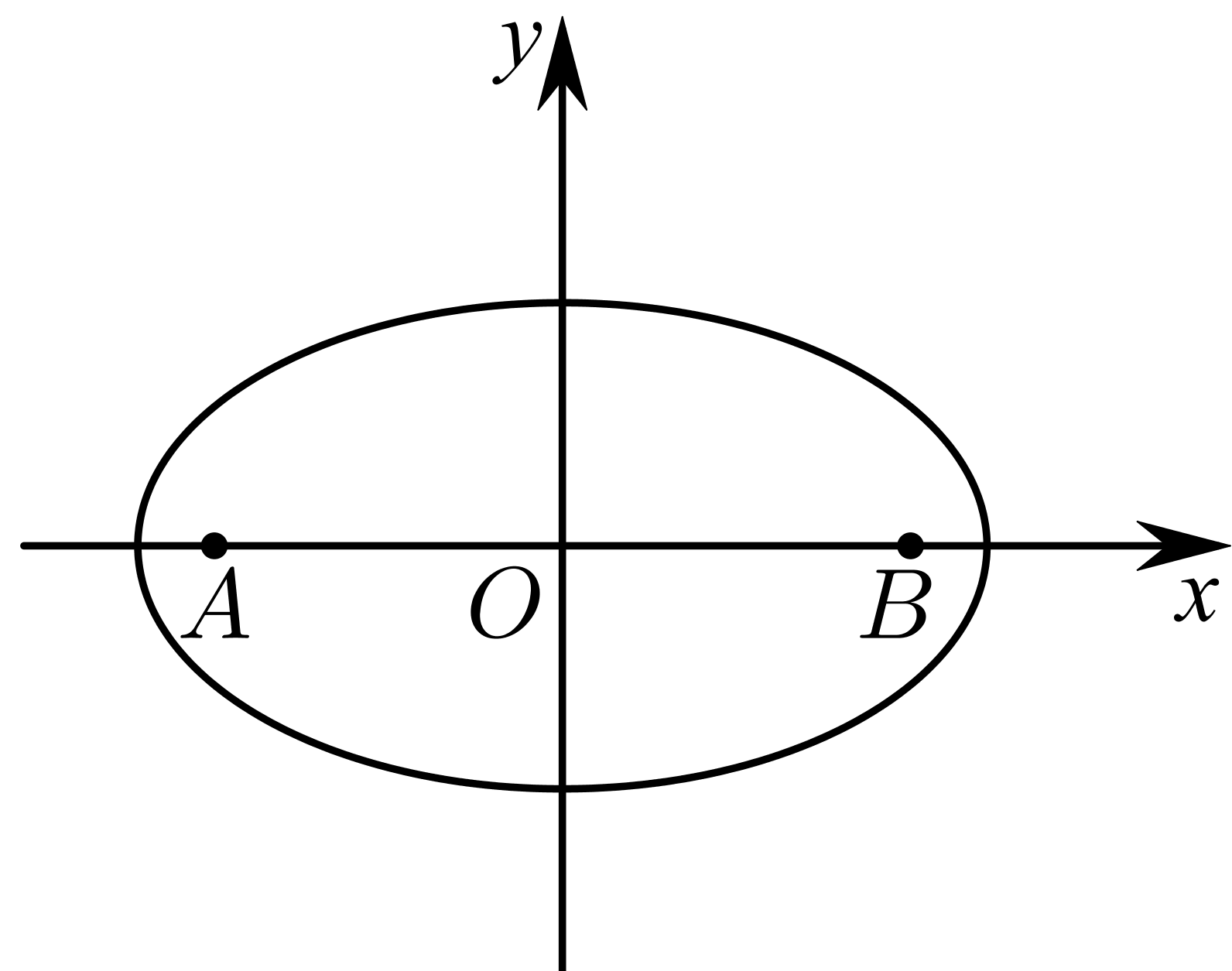
A． B．

C． D．

16．椭圆满足这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发射光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．现在设有一个水平放置的椭圆形台球盘，满足方程：， 点*A*、*B*是它的两个焦点，当静止的小球放在点*A*处，从*A*点沿直线出发，经椭圆壁反弹后，再回到点*A*时，小球经过的最长路程是

A．20 B．18 C．16 D．14

17．椭圆满足这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发射的光线，经椭圆反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．现有一个水平放置的椭圆形台球盘，满足方程，点是它的两个焦点．当静止的小球从点开始出发，沿直线运动，经椭圆壁反射后再回到点时，此时小球经过的路程可能是 （     ）



A．32或4或 B．或28或

C．28或4或 D．32或28或4

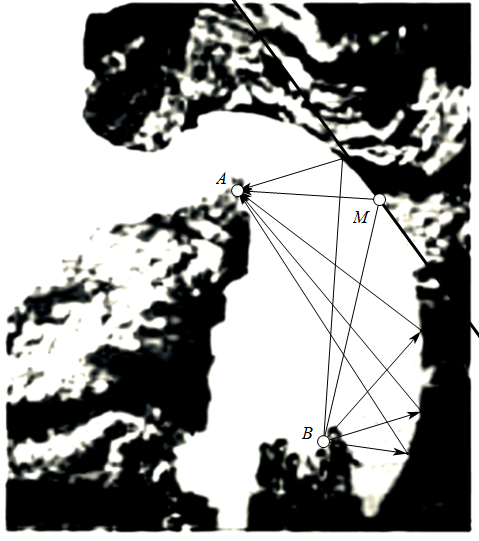
18．传说，意大利的西西里岛有个山洞是用来关押罪犯的，罪犯们曾多次密谋商议逃跑，但不管多完美的计划都会被狱率发现，原来山洞内的空间是一个椭球体，最大截面部分是一个椭圆面，罪犯和狱率所待的地方正好是椭圆的两个焦点，罪犯们说的话经过洞壁的反射，最终都传向了狱警所在的地方，即椭圆的另一个焦点，这里面含着椭圆的光学性质.请利用椭圆的该性质解决下列问题：已知是椭圆：上的点.、是椭圆的左右焦点，，为坐标原点，到椭圆在处的切线的距离为（    ）



A． B． C． D．

（2022·黑龙江·大庆实验中学模拟预测）

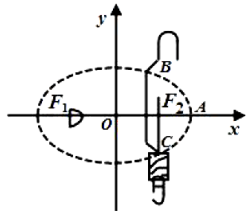
19．桂林山水甲天下，那里水㺯山秀，闻名世界，桂林的山奇特险峻，甲、乙两名探险家在桂林山中探险，他们来到一个山洞，洞内是一个椭球形，截面是一个椭圆，甲、乙两人分别站在洞内如图所示的两点处，甲站在处唱歌时离处有一定距离的乙在处听得很清晰，原因在于甲、乙两人所站的位置恰好是洞内截面椭圆的两个焦点，符合椭圆的光学性质，即从一个焦点发出光经椭圆反射后经过另一个焦点，现已知椭圆：上一点，过点作切线，两点为左右焦点，，由光的反射性质：光的入射角等于反射角，则椭圆中心到切线的距离为 （       ）



A． B．10 C． D．7

（2022江苏南通·高三月考）

20．椭圆具有这样的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线都经过椭圆的另一焦点.电影放映机聚光灯泡的反射镜轴截面是椭圆的一部分，灯丝（看成一个点）在椭圆的右焦点处，灯丝与反射镜的顶点*A*的距离，过焦点且垂直于轴的弦，在*x*轴上移动电影机片门，将其放在光线最强处，则片门应离灯丝（       ） cm.



A．10 B．11 C．12 D．13

21．椭圆有如下光学性质：从椭圆的一个焦点射出的光线，经椭圆反射，其反射光线必经过椭圆的另一焦点，已知椭圆，其长轴的长为，焦距为，若一条光线从椭圆的左焦点出发，第一次回到左焦点所经过的路程为，则椭圆的离心率为\_\_\_\_\_.

22．一般地，我们把离心率为的椭圆称为“黄金椭圆”．对于下列命题：

①椭圆是黄金椭圆；

②若椭圆是黄金椭圆，则；

③在中，，且点在以为焦点的黄金椭圆上，则的周长为；

④过黄金椭圆的右焦点作垂直于长轴的垂线，交椭圆于两点，则；

⑤设是黄金椭圆的两个焦点，则椭圆上满足的点不存在．

其中所有正确命题的序号是\_\_\_\_\_\_．（把你认为正确命题的序号都填上）

23．已知椭圆：，其焦距为，若，则称椭圆为“黄金椭圆”.黄金椭圆有如下性质：“黄金椭圆”的左、右焦点分别是，，以,，，为顶点的菱形的内切圆过焦点，.

（1）类比“黄金椭圆”的定义，试写出“黄金双曲线”的定义；

（2）类比“黄金椭圆”的性质，试写出“黄金双曲线”的性质，并加以证明.

24．椭圆具有如下的光学性质：从一个焦点发出的光线经过椭圆内壁反射后恰好穿过另一个焦点．现从椭圆的左焦点发出的一条光线，经过椭圆内壁两次反射后，回到点，则光线所经过的总路程为\_\_\_\_\_\_．

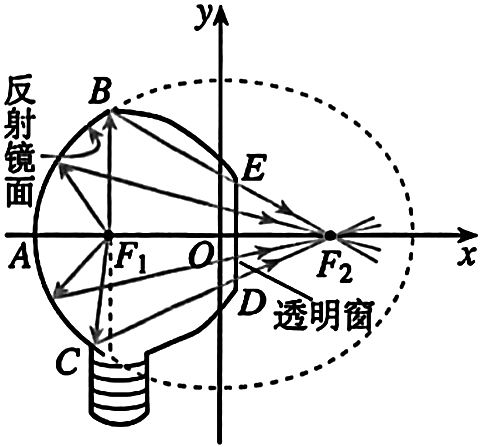
25．椭圆具有这样的光学性质:从椭圆的一个焦点出发的光线,经椭圆反射后,反射光线经过椭圆的另一个焦点.今有一个水平放置的椭圆形台球盘,点A、B是它的焦点,长轴长为2a,焦距为2c,静放在点A的小球(小球的半径忽略不计)从点A沿直线出发,经椭圆壁反射后第一次回到点A时,小球经过的路程是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

26．已知椭圆具有如下光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线射向椭圆上任一点，经椭圆反射后必经过另一个焦点．若从椭圆的左焦点发出的光线，经过两次反射之后回到点，光线经过的路程为8，*T*的离心率为．

(1)求椭圆*T*的标准方程；

(2)设，且，过点*D*的直线*l*与椭圆*T*交于不同的两点*M*，*N*，是*T*的右焦点，且与互补，求面积的最大值．

27．如图，一种电影放映灯的反射镜面是旋转椭圆面（椭圆绕其对称轴旋转一周形成的曲面）的一部分．过对称轴的截口*BAC*是椭圆的一部分，灯丝位于椭圆的一个焦点上，片门位于该椭圆的另一个焦点上．椭圆有光学性质：从一个焦点出发的光线，经过椭圆面反射后经过另一个焦点，即椭圆上任意一点*P*处的切线与直线、的夹角相等．已知，垂足为，，，以所在直线为*x*轴，线段的垂直平分线为*y*轴，建立如图的平面直角坐标系．



(1)求截口*BAC*所在椭圆*C*的方程；

(2)点*P*为椭圆*C*上除长轴端点和短轴端点外的任意一点．

①是否存在*m*，使得*P*到和*P*到直线的距离之比为定值，如果存在，求出的*m*值，如果不存在，请说明理由；

②若的角平分线*PQ*交*y*轴于点*Q*，设直线*PQ*的斜率为*k*，直线、的斜率分别为，，请问是否为定值，若是，求出这个定值，若不是，请说明理由．

28．椭圆具有如下的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线会交于椭圆的另焦点上.已知焦距为2的椭圆的左､右焦点分别为，，从发出的一条不与*x*轴重合的光线，在椭圆上依次经*M*，*N*两点反射后，又回到点，这个过程中光线所经过的总路程为8.

(1)求椭圆*C*的标准方程；

(2)设直线，且满足，若，求实数*m*的取值范围.

（2022河南开封·高二期末）

29．椭圆具有如下光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆内壁反射后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．已知椭圆的左、右焦点分别为，，左、右顶点分别为，．从发出的一条光线，经椭圆上，两点（均不与，重合）各反射一次后，又回到点，这个过程中光线所经过的总路程为．

（1）求椭圆的长轴长；

（2）若椭圆的焦距为，直线与直线交于点，证明，，三点共线．

30．已知椭圆：的上､下顶点分别为，，且短轴长为，为椭圆上任意一点，直线，的斜率之积为，，依次为左､右焦点.

（1）求椭圆的方程；

（2）山不会忘记你，河不会忘记你，祖国不会忘记你!南仁东，“天眼”之父，被追授“时代楷模”荣誉称号.24年，8000多个日夜，500米口径球面射电望远镜首席科学家､总工程师南仁东心无旁骛，为崇山峻岭间的“中国天眼”燃尽生命，在世界天文史上镌刻下新的高度.“天眼”是世界上最大､最灵敏的单口径射电望远镜，它看似一口“大锅”，可以接收到百亿光年外的电磁信号.调试期的“天眼”已经发现了多颗脉冲星，成为国际瞩目的宇宙观测“利器”.在党的十九大报告中，“天眼”与天宫､蛟龙､大飞机等一起，被列为创新型国家建设的丰硕成果……南仁东来不及目睹.但他执着追求科学梦想的精神，将激励一代又一代科技工作者继续奋斗，勇攀世界科技高峰.在“天眼”的建设中大量用到了圆锥曲线的光学性质，请以上面的椭圆为代表，证明：由焦点发出的光线射到椭圆上任意一点后反射，反射光线必经过另一焦点.(温馨提示：光线射到曲线上某点反射时，法线垂直于该点处的切线)

**参考答案：**

1．证明见解析

【分析】根据椭圆的性质以及引理即可求解.

【详解】作关于切线的对称点，连接交于点，要证，

只需证明点和点重合，由引理1知点是直线上使得值最小的唯一点；

并且由引理3知点也是直线上使得值最小的唯一点，

与点重合，则．

2．20

【分析】根据椭圆的性质以及定义即可求解.

【详解】椭圆方程为为该椭圆的一个焦点，故自射出的光线反射后，反射光线必过另一个焦点，故△的周长为：

．

3．ACD

【解析】先由题意，不妨令椭圆的焦点在轴上，分三种情况讨论：（1）球从沿轴向左直线运动；（2）球从沿轴向右直线运动；（3）球从不沿轴，斜向上（或向下）运动；根据椭圆的性质，以及椭圆的定义，即可分别得出结果.

【详解】由题意，不妨令椭圆的焦点在轴上，以下分为三种情况：

（1）球从沿轴向左直线运动，碰到左顶点必然原路反弹，

这时第一次回到路程是；

（2）球从沿轴向右直线运动，碰到右顶点必然原路反弹，

这时第一次回到路程是；

（3）球从不沿轴，斜向上（或向下）运动，碰到椭圆上的点，反弹后经过椭圆的另一个焦点，再弹到椭圆上一点，经反弹后经过点．

此时小球经过的路程是．

综上所述，从点沿直线出发，经椭圆壁反射后第一次回到点时，小球经过的路程是或或．

故选：ACD.

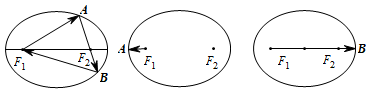
【点睛】关键点点睛：

求解本题的关键在于对椭圆定义和性质的理解，根据椭圆的光学性质，当光线不沿焦点所在直线出发时，从一个焦点出发，经过反射后必过另一焦点；由此即可求解.

4．或或

【解析】分析出光线的三种路径，分别求解即可.

【详解】依据椭圆的光学性质，光线从左焦点出发后，有以下三种可能：



对第一种路径：，解得离心率

对第二种路径：，解得离心率

对第三种路径：，解得离心率

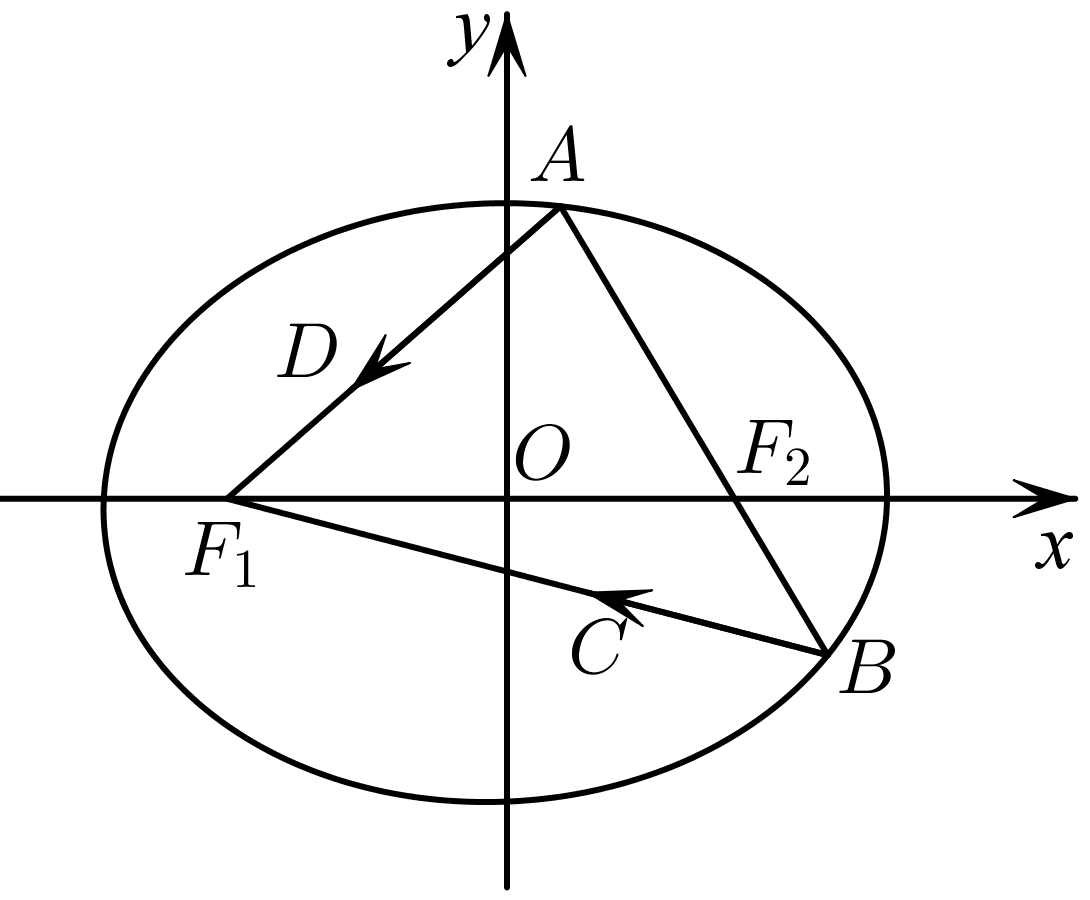
故答案为：或或

【点睛】本题考查椭圆的性质，重点是分析出其路径.

5．##

【分析】根据光学性质，在中由椭圆的定义可求出，再由直角三角形求出，计算离心率即可.

【详解】由椭圆的光学性质可知，都经过，且在中，，如图，



所以，

由椭圆的定义可知，即，又，

可得，在中，，

所以，所以.

故答案为：

6．##

【分析】由题意可，得根据椭圆的和双曲线的定义可得，整理得到，从而结合路程速度时间之间的关系可得，求得答案.

【详解】设，椭圆的长轴长为，双曲线的实轴长为，光速为，

而与的离心率之比为，即，即，

在图③，

两式相减得：，

即.

在图④中，，

设图④，光线从点发出，经两次反射后又回到了点，历时*t*秒，

由题意可知：，则，

故（秒），

故答案为：

7．(1)

(2)能，定点为（0，）

【分析】（1）由条件列方程求可得椭圆方程；

（2）联立方程组，利用设而不求法结论完成证明.

（1）

由已知可设椭圆方程为，

则，，

又

所以，

故椭圆*C*的标准方程为

（2）

设*AB*方程为，由，得，



设，则..

由对称性知，若定点存在，则直线*BM*与直线*AN*交于*y*轴上的定点，

由得，则直线*BM*方程为，

令，则









又，

则，

所以，直线*BM*过定点（0，），同理直线*AN*也过定点.

则点（0，）即为所求点.

【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题．

8．(1)

(2)①；②或.

【分析】（1）利用椭圆的定义得出，再利用垂直关系和进行求解；

（2）①设直线的方程为，联立直线与椭圆的方程，得到关于的一元二次方程，写出两根之和与积，利用斜率公式及得到关于、的关系式，再利用直线方程的点斜式证明直线过定点；

②借助上问中、的关系式，化简两根之和与积，利用及点在椭圆上得到，再进一步化简求解.

（1）

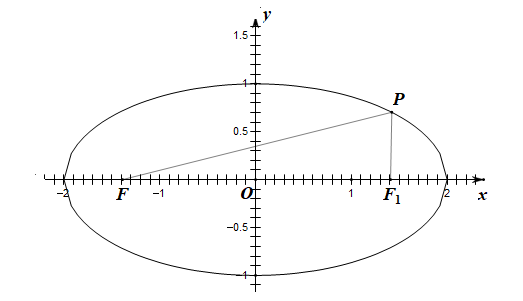
解：不妨设、是椭圆的左焦点、右焦点，

则轴，又因为，，

所以，

即，所以，

则椭圆的标准方程为：.



（2）

①证明：设直线的方程为，，，

联立，得：，

则，，

因为，所以，

即，

即，

即，

则，

即，即，

则或，

当时，直线可化为，

即直线过定点（与左焦点重合，舍）；

当时，直线可化为，

即直线过定点；

综上所述，直线过定点；

②解：由①得，则，，

且，

解得；

因为，所以，

即，

即，即，

即，

即，即，

则或，

所以或.

【思路点睛】在处理直线与圆锥曲线的综合问题时，涉及直线过定点问题是常见题型，证明动直线过定点问题的基本思路是：

设动直线的方程（斜率存在）为，由题设条件将用表示为，得，即直线过定点.

9．（1）；（2）．

【分析】（1）由题设，若椭圆*C*的长轴长为，则，即可求离心率.

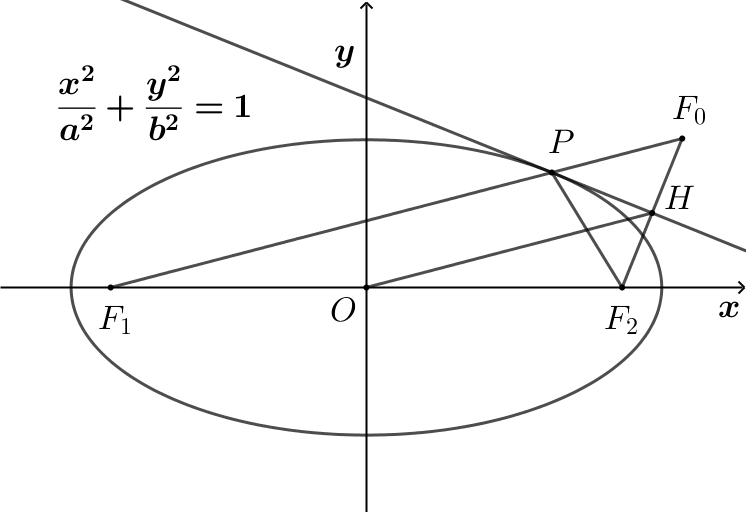
（2）法一：延长交于点，易得且*H*为中点，由中位线的性质及点在圆上求椭圆参数*a*，即可得椭圆方程；法二：设，在*l*上的射影分别为，连接，由反射性质设则，即可得、，根据求椭圆参数*a*，写出椭圆方程.

【详解】（1）设椭圆*C*的长轴长为，

由题意知：发出的光经椭圆两次反射后回到经过的路程为，

∴．

（2）法一：如图：



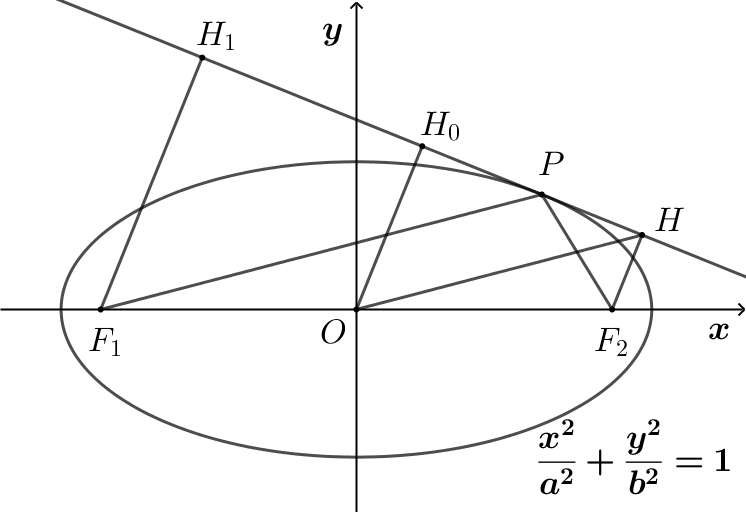
延长，交于点，

在中，，则且*H*为中点，

在中，，则，

，即椭圆方程为．

法二：设，在*l*上的射影分别为，连接，如图：



设，则，

在中，可得，同理：，

∴，，

∵，

∴椭圆方程为．

【点睛】关键点点睛：第二问，利用椭圆上点的反射性质确定相关角或边的等量关系及对称关系，再根据列方程求椭圆参数.

10．（1）；（2）；（3）或.

【分析】（1）根据，代入数据，即可得答案.

（2）根据圆的对称性、反射及虹的性质可得，进而可求得答案；

（3）根据圆的对称性、反射及虹的性质可得的关系，结合三角恒等变换即可得解.

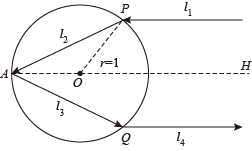
【详解】（1）由题意得，所以，

因为，所以

（2）连接*AO*并延长，如图，由圆的对称性、反射及虹的性质，可得，

所以，

所以；



（3）过点*O*作，如图，由圆的对称性、反射及虹的性质，

可得，

所以，

所以，，

所以

，

所以，

所以，

因为，所以，所以，

所以或，

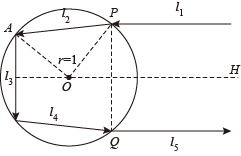
又，

当时，，；

当时，，，

所以

.



【点睛】解题的关键是读懂题意，根据所给概念和公式，结合图形的几何性质，计算化简，即可得答案，考查分析理解的能力，属中档题.

11．C

【分析】根据椭圆的光学性质可知，小球从点A沿直线出发，经椭圆壁反弹到B点继续前行碰椭圆壁后回到A点，所走的轨迹正好是两次椭圆上的点到两焦点距离之和，进而根据椭圆的定义可求得答案．

【详解】依题意可知小球经两次椭圆壁后反弹后回到A点，根据椭圆的性质可知所走的路程正好是4a=4×4=16

故选C．

【点睛】本题主要考查了椭圆的应用．解题的关键是利用了椭圆的第一定义,是基础题.

12．C

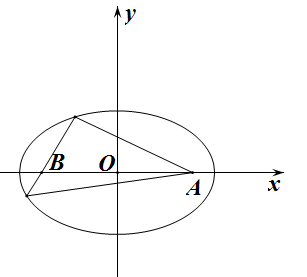
【分析】根据椭圆定义直接可得.

【详解】由题知，椭圆长半轴长

依题意可知小球经两次椭圆壁反弹后回到*A*点，

根据椭圆的定义可知所走的路程正好是4*a*=4×4=16

故选：C



13．B

【分析】①根据椭圆的简单几何性质可知卫星向径的最小值和最大值分别为什么；

②根据向径的最小值与最大值的比值，结合椭圆的性质即可得出结论；

③根据在相同的时间内扫过的面积相等，即可判断

④根据题意结合椭圆的图形知卫星运行速度在近地点时最大，在远地点时最小．

【详解】解：如图所示，

对于①，卫星向径的最小值为，最大值为，①正确；

对于②，卫星向径的最小值与最大值的比值为，

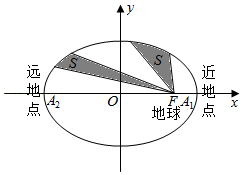
越小，就越大，就越小，椭圆轨道越扁，②错误；

对于③，根据在相同的时间内扫过的面积相等，卫星在左半椭圆弧的运行时间大于其在右半椭圆弧的运行时间，③正确；

对于④，卫星运行速度在近地点时最大，在远地点时最小，④错误；

综上，正确结论的序号是①③，共2个．

故选．



【点睛】本题考查椭圆的相关性质，以及物理学中开普勒定律的理解，属于基础题．

14．C

【详解】由椭圆的光学性质得到直线平分角，因为

由，得到，故 .

故答案为C.

15．A

【分析】先求得点坐标，然后求得的角平分线所在的直线的方程.

【详解】，

直线的斜率为，

由于直线，与*l*的夹角相等，则的角平分线所在的直线的斜率为，

所以所求直线方程为.

故选：A

16．C

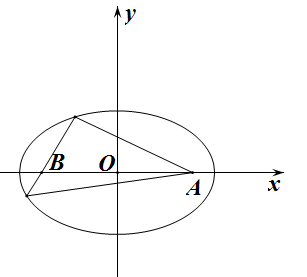
【分析】根据椭圆定义直接可得.

【详解】由题知，椭圆长半轴长

依题意可知小球经两次椭圆壁反弹后回到*A*点，

根据椭圆的定义可知所走的路程正好是4*a*=4×4=16

故选：C



17．D

【分析】分小球沿长轴向左、向右运动和不沿长轴运动，结合光学性质即可求解.

【详解】由方程可知，

沿着长轴向右运动反射时经过的路程为，

沿着长轴向右运动反射时经过的路程为，

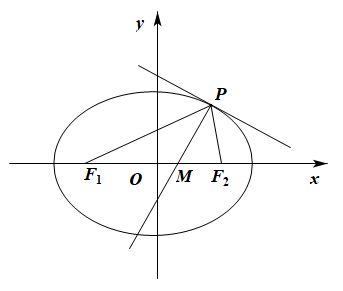
不延长轴时经椭圆反射后经过*B*点，再次经椭圆反射后回到*A*点，经过的路程为，

小球经过的路程可能是32或28或4.

故选：D.

18．B

【分析】先求出的坐标，再求出的角平分线与的交点，从而可求切线方程，故可得到椭圆在处的切线的距离.

【详解】

由椭圆的对称性，不妨设在第一象限.

由椭圆方程可得半焦距，故，且，

因为，故，

故即，

所以，

故即，故，

所以，同理，

设的平分线交轴于，则，

故，故，故，

由题设中的椭圆性质可得过切线与垂直，故切线的斜率为，

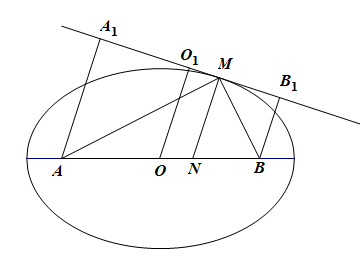
故切线的方程为：，

故原点到切线的距离为，

故选：B

19．C

【分析】如图，过作处切线的垂线交于，过分别作切线的垂线交切线于点，利用二倍角公式可求，结合椭圆的定义可求到切线的距离.

【详解】

如图，过作处切线的垂线交于，过分别作切线的垂线交切线于点，

由光学性质可知平分，，

则，

因为，故，所以，



，

故选：C.

20．C

【分析】根据题设及椭圆参数关系有求出椭圆参数，利用椭圆的性质知片门放在光线最强处应离灯丝.

【详解】由题设知：，解得，

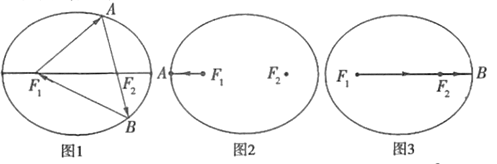
所以片门放在光线最强处，片门应离灯丝为.

故选：C.

21．或或

【分析】由题意结合椭圆的定义分类讨论确定椭圆的离心率即可.

【详解】依据椭圆的光学性质，光线从左焦点出发后，有如图1，图2，图3所示的三种路径．



路径一，4*a*=5*c*，则*e*=；

路径二，2（*a*-*c*）=5*c*，则*e*=；

路径三，2（*a*+*c*）=5*c*，则.

故椭圆*C*的离心率为或或.

【点睛】本题主要考查椭圆离心率的求解，分类讨论的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

22．③④⑤

【分析】根据黄金椭圆的定义、椭圆的定义、椭圆的方程逐一判断即可.

【详解】对①，，①不正确；

对②，若焦点在轴上，则，解得，

若焦点在轴上，则，解得，②不正确；

对③，，，，③正确；

对④，，④正确；

对⑤，设，则，而，

所以，与联立无实数解．

因此椭圆上满足的点不存在，⑤正确，

故答案为：③④⑤.

23．（1）见解析（2）见解析

【详解】分析：（1）“黄金双曲线“的离心率为的倒数）．

（2）把椭圆结论中点与交换位置得双曲线的性质．

详解：（1）黄金双曲线的定义：已知双曲线：，其焦距为，若（或写成），则称双曲线为“黄金双曲线”.

（2）在黄金双曲线的性质：已知黄金双曲线：的左、右焦点分别是、，

以、、、为顶点的菱形的内切圆过顶点、.

证明：直线的方程为，原点到该直线的距离，

由及，得 ，

将代入，得，又将代入，化简得，

故直线与圆相切，同理可证直线、均与圆相切，即以、的直径的圆为菱形的内切圆，命题得证.

点睛：本题考查类比推理．类比推理不是把类比对象的结论一字不改直接拿来，而是要根据具体情况具体分析，适当修改．如双曲线的离心率大于1，因此类比时可得“黄金双曲线”的离心率为黄金比的倒数即，又椭圆中，双曲线中，因此椭圆结论中焦点到顶点的位置在双曲线中要交换，才可能正确．当然解题方法可类似得出．

24．

【分析】根据题意，结合椭圆的定义，即可求解.

【详解】根据题意知，光线经两次椭圆壁反弹后回到焦点，

由椭圆的方程，可得，

利用椭圆的定义，可得所走的路程为.

故答案为：.

25．4a或2(a－c)或2(a+c)

【详解】试题分析：假设长轴在x轴，短轴在y轴，设A为左焦点，B是它的右焦点，以下分为三种情况：（1）球从A沿x轴向左直线运动，碰到左顶点必然原路反弹，这时第一次回到A路程是2（a-c）；（2 ）球从A沿x轴向右直线运动，碰到右顶点必然原路反弹，这时第一次回到A路程是2（a+c）；（3）球从A不沿x轴斜向上（或向下）运动，碰到椭圆上的点C，反弹后经过椭圆的另一个焦点B，再弹到椭圆上一点D，经D反弹后经过点A．此时小球经过的路程是4a．综上所述，从点A沿直线出发，经椭圆壁反射后第一次回到点A时，小球经过的路程是4a或2（a-c）或2（a+c）．故答案为4a或2（a-c）或2（a+c）．

考点：椭圆的简单性质．

26．(1)

(2)

【分析】（1）由题意，易知，再结合椭圆的离心率为求解；

（2）根据与互补，得到，得到，联立直线*MN*与椭圆的方程，结合韦达定理求得，得到直线*MN*的方程为，再求得点到直线*MN*的距离*d*和，由求解.

（1）

解：由椭圆的性质可知，左焦点发出的光线，

经过两次反射之后回到点，光线经过的路程为，解得．

又椭圆的离心率为，得，

所以，

故，

故椭圆*T*的标准方程为；

（2）

由题意得，设，．

因为与互补，

所以，即，

化简整理，可得，

设直线*MN*的方程为，

得．

联立直线*MN*与椭圆的方程得，

整理得，

，可得，

则，，

所以，

解得，

故直线*MN*的方程为．

点到直线*MN*的距离，

，



，

所以，

由，可得，，即．

记，则，，

所以，

当且仅当，即，时，等号成立．

故面积的最大值为．

27．(1).

(2)①存在②是定值

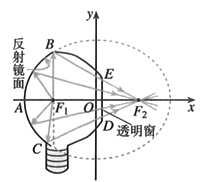
【分析】（1）设所求椭圆方程为，由椭圆的性质求得，，可得椭圆的方程；

（2）①存在, 设椭圆上的点,直接计算，即可探索出存在*m*；

②由（1）得椭圆的方程为，设椭圆上的点，有，证明椭圆在点处的切线方程为， 再由右光学性质得直线，由此可求得定值.

（1）

设所求椭圆方程为，



则，

由椭圆的性质：，所以，

，

所以椭圆的方程为.

（2）

由椭圆的方程为，则.

①存在直线，使得*P*到和*P*到直线的距离之比为定值.

设椭圆上的点,

则，*P*到直线的距离，

所以，

所以，当时，（定值）.

即存在，使得*P*到和*P*到直线的距离之比为定值.

②设椭圆上的点，则，

又椭圆在点处的切线方程为，

证明如下：对于椭圆，

当，，则，

所以椭圆在处的切线方程为，

又由，可以整理切线方程为：，

即切线方程为，即，也即.

所以椭圆在点处的切线方程为，

同理可证：当，椭圆在点处的切线方程为，

综述：椭圆在点处的切线方程为，

所以在点处的切线的斜率为，

又由光学性质可知：直线，所以，则.

所以，

，

那么.

28．(1)

(2)

【分析】（1）由题可得过椭圆左焦点，根据椭圆定义可求解；

（2）联立直线与椭圆方程，利用韦达定理结合向量关系可得，即可根据的范围求出.

（1）

由椭圆的光学性质知过椭圆左焦点，由椭圆定义知，即，

所以，所以椭圆方程为；

（2）

由已知，设，

则直线方程为，联立方程组可得，

则，，

因为，所以，所以，

则，消去可得，

，，即，解得，

.

29．（1）4；（2）证明见解析．

【分析】(1)利用椭圆的定义求解；

(2)要证，，三点共线，等价于证，利用代数法求出，的坐标，再用向量共线的坐标表示证明即可.

【详解】(1)由已知及椭圆定义易得：光线所经过的总路程为，，

所以椭圆的长轴长为．

(2)椭圆的焦距，所以，，椭圆的方程为，

焦点，，

因为直线过点，可设直线的方程为：，，

由，

可得，

所以，.

又，，直线的方程为

令，得

则，

所以

所以，又，相交于点，所以，，三点共线．

30．（1）.（2）答案见解析

【解析】（1）由已知得坐标，设，结合斜率公式，即可求出椭圆方程；

（2）设点坐标，根据已知求出切线斜率，进而求出法线方程，利用几何法证明法线是的角平分线即可.

【详解】（1）设，直线，的斜率为，，

由题意知，，

由，得，

整理得.即椭圆的方程为.

（2）当为椭圆顶点时结论显然成立，

当不是椭圆顶点时，要证结论只须证法线平分，

设点坐标，

设切于点的切线方程为，

与椭圆方程联立，消去得，

，



，

，

，



所以切线斜率为，所以法线斜率为，

法线方程为，

令可得法线与轴交点的横坐标为，

∴，



，

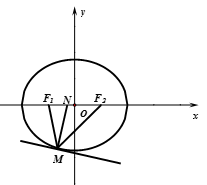
∴，

，

，

或（舍去）

所以法线平分，结论成立.



【点睛】本题考查椭圆轨迹方程、直线与椭圆的位置关系，注意几何法证明椭圆的性质，意在考查直观想象、逻辑推理、数学计算能力，属于较难题.

