平面向量与三角形的“四心”

一、三角形的外心

1. 三角形外心的定义：三角形三边的中垂线交于一点，这一点是该三角形的外接圆的圆心，简称外心。

2. 三角形外心的作法：三角形三边的中垂线的交点。

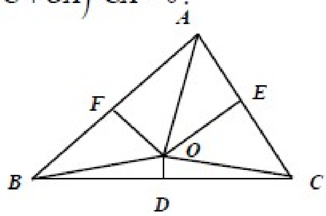
3. 三角形外心的性质：

①点O是ΔABC的外心$\Leftrightarrow$点O到的三个顶点的距离相等.

②点O是ΔABC的外心$\Leftrightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right| \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2$.

③点O是ΔABC的外心$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{CA}=0$.

二、三角形的垂心



1. 三角形垂心的定义:三角形三边上的高的交点叫三角形的垂心.

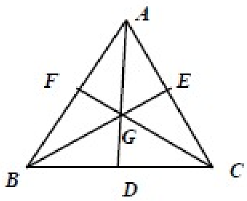
2. 三角形垂心的性质

①点H是ΔABC的垂心$\Leftrightarrow \overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$.

证明：由$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\cdot(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HA})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{AC}$,

同理$\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$.故 H 是△ABC 的垂心.（反之亦然（证略））

三、三角形的重心



预备知识：

1. 在ΔABC中，边BC的中点为D，则$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

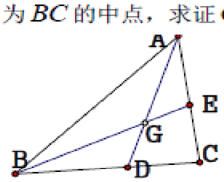
2. 三角形重心的定义：三角形的三条中线的交点叫该三角形的重心.

3. 三角形重心的性质：

①G是ΔABC的重心$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$（$\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GE}$或$\overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{GF}$）

即：三角形重心与顶点的距离等于它到对边中点距离的两倍.

证明：△ABC 的重心G，D为BC的中点，求证$GA=2GD$.

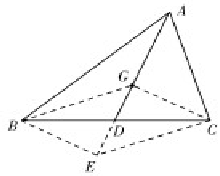


证明：$\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD}=\frac{\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG}=\frac{1-\lambda}{2}(\vec{a}+\vec{b})$，

所以$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DG}=\frac{\lambda-2}{2}\vec{a}+\frac{\lambda}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}$；

又$\overrightarrow{BG}//\overrightarrow{BE}$，**所以：**$\frac{\lambda-2}{2}\vec{a}+\frac{\lambda}{2}\vec{b}=k(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a})$，**故**$\lambda=\frac{2}{3}$.

②G是ΔABC的重心$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.



证明:作图如右，图中$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GE}$,连结 BE 和 CE，则 CE=GB，BE=GC$\Leftrightarrow$BGCE 为平行四边形

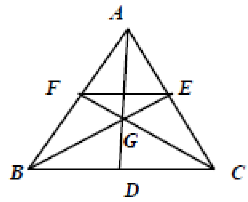
$\Rightarrow$ D 是 BC 的中点，AD 为 BC 边上的中线,将$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GE}$代入$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$=0，得$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{EG}$=0

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GE}=-2\overrightarrow{GD}$，故 G 是△ABC 的重心.（反之亦然（证略））

③G 是 ΔABC 的重心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

④若 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$，则其重心的坐标为 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

3．重心定理：三角形的三条中线交于一点.



分析：设 AD 与 BE 交于点 G，设 $\overrightarrow{AG}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

则 $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\lambda\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=(\frac{\lambda}{2}-1)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，又 $\overrightarrow{BG}\,//\,\overrightarrow{BE}$，则 $\overrightarrow{BG}=x\overrightarrow{BE}$

即 $(\frac{\lambda}{2}-1)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=x(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，所以 $\lambda=\frac{2}{3}$，从而 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

所以 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$，

所以 $\overrightarrow{CF}\,//\,\overrightarrow{CG}$，又 $\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG}$ 有一个公共点 C，则 C,G,F 共线，即 AD,BE,CF 交于同一个点.

四：三角形的内心

预备知识：

1． 角平分线性质定理：在 ΔABC 中，$\angle A$ 的内角平分线交边 BC 于点 D.

求证：$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

证明：略

2． 若 P 是 $\angle BAC$ 的内角平分线上的任意一点，则 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，$\lambda\in[0,+\infty)$

分析：$\because \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$、$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，设 $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$；$\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，以 $\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF}$ 为邻边作平行四边形 $AEGF$，则 $AEGF$ 构成菱形，且 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，又点 P 在 $\angle BAC$ 的角平分线上，则 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AG}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，$\lambda\in[0,+\infty)$.

注意：这里给出角平分线的向量表示形式。

2．三角形内心的定义： 三角形的三个内角平分线的交点叫该三角形内切圆的圆心，简称内心.

3．三角形内心的性质：

①O 是 ΔABC 的内心 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow|\overrightarrow{BC}|\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

（注意：这里 a，b，c 分别表示三角形三边 BC，AC，AB 的长）

证法 1： 在 ΔABD 中，由内角平分线的性质定理得 $\frac{OD}{AO}=\frac{BD}{AB}=\frac{BD}{c}$，则 $BD=c\frac{OD}{AO}$，

在ΔACD中，由内角平分线的性质定理得$\frac{OD}{AO}=\frac{DC}{AC}=\frac{DC}{b}$，则$DC=b\frac{OD}{AO}$，

由$BD+DC=BC=a$，则$c\frac{OD}{AO}+b\frac{OD}{AO}=a$，则$\frac{OD}{AO}=\frac{a}{b+c}$，所以$1+\frac{OD}{AO}=1+\frac{a}{b+c}$，

则$\frac{AD}{AO}=\frac{AO+OD}{AO}=\frac{a+b+c}{b+c}$，则$\frac{AO}{AD}=\frac{b+c}{a+b+c}$，则$\overrightarrow{AO}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}$；

在ΔABC中，由内角平分线的性质定理得$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$，$\therefore\frac{CD}{CB}=\frac{b}{b+c}$，则$\overrightarrow{CD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}$，

又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{b}{b+c}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$

则$\overrightarrow{AO}=\frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}=\frac{b+c}{a+b+c}(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC})=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AO}=\frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$，$\therefore a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

证法2：由角平分线的性质得$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$，则$\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}=\frac{c}{b}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD})$，则$\overrightarrow{BD}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC}$，

$\frac{AE}{EC}=\frac{c}{a}$，则$\overrightarrow{AE}=\frac{c}{a}\overrightarrow{EC}=\frac{c}{a}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})$，则$\overrightarrow{AE}=\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}$，

一方面设$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{AD}=\lambda$（$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$）$=\lambda(\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{BC})=\lambda\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

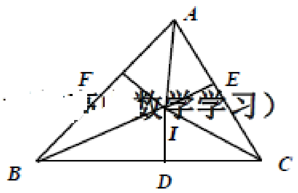
$=\frac{b\lambda}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}\overrightarrow{AC}$

$\therefore\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=(\frac{b\lambda}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=(\frac{b\lambda}{b+c}-1)\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}\overrightarrow{AC})$

又$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，而$\overrightarrow{BO}//\overrightarrow{BE}$，则$\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{BE}$，

即$(\frac{b\lambda}{b+c}-1)\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}\overrightarrow{AC})=x(\frac{c}{a+c}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，由平面向量基本定理得：

则$\begin{cases}\frac{b\lambda}{b+c}-1=-x\\ \frac{c\lambda}{b+c}=\frac{cx}{a+c}\end{cases}$，则$\lambda=\frac{b+c}{a+b+c}$，则



$\overrightarrow{AO}=\frac{b\lambda}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c\lambda}{b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{b+c}{a+b+c}(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC})=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

则$\overrightarrow{AO}=\frac{b}{a+b+c}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{c}{a+b+c}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$，$\therefore a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

强化练习：

1. 已知ΔABC三个顶点A、B、C及平面内一点P，满足$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，若实数$\lambda$满足：

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AP}$，则$\lambda$的值为（　C　）

A. 2　　　B. $\frac{3}{2}$　　　C. 3　　　D. 6

2. 已知 P 是△ABC 所在平面内与 A 不重合的一点，满足$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AP}$，则 P 是△ABC 的（A）

A、重心　　　B、垂心　　　C、外心　　　D、内心

3．已知 O 为平面内一点，A、B、C 平面上不共线的三点，动点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)$，

$\lambda\in(0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的（ A ）

A、重心　　B、垂心　　C、外心　　D、内心

4.(2016·广西柳州铁路一中月考)已知 A，B，C 是平面上不共线的三点，O 是三角形 ABC 的重心，动点 P 满足$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$，则点 P 一定为三角形 ABC 的(　　)

A.AB 边中线的中点 B.AB 边中线的三等分点(非重心)C.重心 D.AB 边的中点

解析：设 AB 的中点是 E，∵O 是三角形 ABC 的重心，

$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OC})$，

$\because\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{EO}$，$\therefore\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OE}+4\overrightarrow{EO})=\frac{1}{3}\times3\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{EO}$，

∴P 在 AB 边的中线上，是中线的三等分点，不是重心.故选 B.

5. 已知 A、B、C 是平面上不共线的三点，O 为△ABC 的外心，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}+(1+2\lambda)\overrightarrow{OC}]$ $(\lambda\in R,\lambda\neq0)$，则 P 的轨迹一定通过△ABC 的

（　　）A. 内心　　B. 垂心　　C. 重心　　D. AB 边的中点

解析：$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\frac{1}{3}[(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}-2(1-\lambda)\overrightarrow{OC}]$

$=\frac{1-\lambda}{3}[(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})]=\frac{1-\lambda}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，由平行四边形法则知 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ 必过 AB 边的中点，注意到 $\lambda\neq0$，所以 P 的轨迹在 AB 边的中线上，但不与重心重合，故选 D.

6．在三角形 ABC 中，动点 P 满足：$\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{CB}^2-2\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CP}$，则 P 点轨迹一定通过△ABC 的（ A ）

A 外心　B 内心　C 重心　D 垂心

解析：设 AB 的中点为 G，$\overrightarrow{CA}^2=\overrightarrow{CB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}\Rightarrow\overrightarrow{CA}^2-\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$\Rightarrow(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0\Rightarrow(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$\Rightarrow2\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0\Rightarrow-2\overrightarrow{CG}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$\Rightarrow2\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CG})=0\Rightarrow2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{GP}=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{GP}$，则 P 点在 AB 的垂直平分线上。

7. 已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{CA}=0$，

则 O 点是△ABC 的（　　）A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解析：由已知得$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OC}^2=0$

$\Leftrightarrow|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$. 所以 O 点是△ABC 的外心. 选 A .

8. O是平面上一定点，A、B、C是平面上不共线的三个点，若$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2$

$=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{AB}^2$，则$O$是$\Delta ABC$的（ D ）

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解析：由已知得$|\overrightarrow{OA}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2$

$\Rightarrow(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{BA}\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{BA}\cdot 2\overrightarrow{OC}=0$，$\therefore\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{BA}$．同理$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$．故选 D．

9.若O是ΔABC所在平面内一点，A、B、C是平面上不共线的三个点，动点P满足

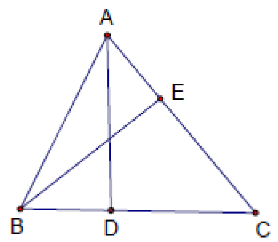
$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则$\overrightarrow{AP}$一定通过$\Delta ABC$的（ ）．

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解析：如图所示 AD 垂直 BC，BE 垂直 AC， D、E 是垂足.

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}$$

$$=\frac{-|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos B}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|\cos C}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}=-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|=0$$



$\therefore$ 点P的轨迹一定通过ΔABC的垂心，即选D.

10. 已知 O 是△ABC 所在平面内的一点，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则动点 P 一定过△ABC 的（ C ）

A、重心　　B、垂心　　C、外心　　D、内心

解析：设 BC 的中点为 D，则$\dfrac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}=\overrightarrow{OD}$，则由已知得$\overrightarrow{DP}=\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)$，

$$\therefore\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos C}\right)$$

$$=\lambda\left(\frac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos(\pi-B)}{|\overrightarrow{AB}|\cos B}+\frac{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos C}{|\overrightarrow{AC}|\cos C}\right)=\lambda(-|\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|)=0．$$

∴DP⊥BC，P 点在 BC 的垂直平分线上，故动点 P 的轨迹通过△ABC 的外心. 选 C .

12. 已知 O 是平面上的一定点，A、B、C 是平面上不共线的三个点，动点 P 满足

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C}\right)$，$\lambda\in[0,+\infty)$，则动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的（　　）

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

解析：由已知得 $\overrightarrow{AP}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|\sin C})$，由**正弦定理**知 $|\overrightarrow{AB}|\sin B=|\overrightarrow{AC}|\sin C$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{\lambda}{|\overrightarrow{AB}|\sin B}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，设 BC 的中点为 D，则由平行四边形法则可知点 P 在 BC 的中线 AD 所在的射线上，所以动点 P 的轨迹一定通过△ABC 的重心，故选 A .

13. 三个不共线的向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|})=\overrightarrow{OB}\cdot(\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|}+\frac{\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}|})=\overrightarrow{OC}\cdot(\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|})$ = 0，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 垂心　　B. 重心　　C. 内心　　D. 外心

解析：$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}$ 表示与△ABC 中∠A 的外角平分线共线的向量，由 $\overrightarrow{OA}\cdot(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|})$= 0 知 OA 垂直∠A 的外角平分线，因而 OA 是∠A 的平分线，同理，OB 和 OC 分别是∠B 和∠C 的平分线，故选 C .

14. （06 陕西）已知非零向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 满足 $(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC}=0$ 且 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，则△ABC 为(　　)

A. 三边均不相等的三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰非等边三角形　　D. 等边三角形

解析：由 $(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})\cdot\overrightarrow{BC}=0$，知角 A 的平分线垂直于 BC，故△ABC 为等腰三角形，即|AB| = |AC|；

由 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2}$，$\therefore\angle A=60^\circ$. 所以△ABC 为等边三角形，选 D .

15. 已知 ΔABC 三个顶点 A、B、C，若 $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$，则 ΔABC 为（ C ）

A. 等腰三角形　B. 等腰直角三角形　C. 直角三角形　　D. 既非等腰又非直角三角形

解析：$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}\Rightarrow\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=0\Rightarrow\angle BCA=90^0$

16. 已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若 $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}$ = **0**，则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解析：$\because\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$，则 $(a+b+c)\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$ = **0**，得

$\overrightarrow{AO}=\frac{bc}{a+b+c}(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$. 因为 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 与 $\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 方向上的单位向量，

设 $\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，则 $\overrightarrow{AP}$ 平分∠BAC. 又 $\overrightarrow{AO}$、$\overrightarrow{AP}$ 共线，知 AO 平分∠BAC.

同理可证 BO 平分∠ABC，CO 平分∠ACB，所以 O 点是△ABC 的内心.

17. 已知 O 是△ABC 所在平面上的一点，若 $\overrightarrow{PO}=\dfrac{a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}}{a+b+c}$（其中 P 是△ABC 所在平面内任意一点），则 O 点是△ABC 的(　　)

A. 外心　　B. 内心　　C. 重心　　D. 垂心

解析：由已知得 $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}-c\overrightarrow{PA}-b\overrightarrow{PA}}{a+b+c}=\overrightarrow{PA}+\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}$，

$\therefore \overrightarrow{AO}=\dfrac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{a+b+c}=\dfrac{bc}{a+b+c}(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{c}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{b})=\dfrac{bc}{a+b+c}(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，

由上题结论知 O 点是△ABC 的内心．故选 B.

18．若 ΔABC 的外接圆的圆心为 O，半径为 1，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$(　D)

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. 1　　D. $-\dfrac{1}{2}$

解析：$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}\Rightarrow(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})^2=(-\overrightarrow{OC})^2$

19. 已知 a，b，c 分别为△ABC 中∠A，∠B，∠C 的对边，G 为△ABC 的重心，且 $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}+c\cdot\overrightarrow{GC}$ = **0**，则△ABC 为(　　)

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形　　C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

解析：∵G 是△ABC 的重心，∴ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ = **0**，又 $a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB}+c\cdot\overrightarrow{GC}$ = **0**，

$\therefore a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}-c(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB})$ = **0**，即 $(a-c)\overrightarrow{GA}+(b-c)\overrightarrow{GB}$ = **0**．

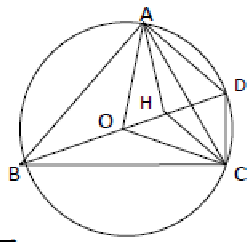
∵ $\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}$ 不共线，∴a － c ＝ b － c ＝ 0，即 a ＝ b ＝ c．∴△ABC 为等边三角形．选 D.

20．设 O 为△ABC 的外心，H 为△ABC 的垂心，则 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

证明：在△ABC 的外接圆 O 中作直径 BD，连接 AD、DC，则有：$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$，AD⊥AB，DC⊥BC，

又 H 是垂心，则 AH⊥BC，CH⊥AB，

∴CH∥AD，AH∥DC，于是 AHCD 是平行四边形，∴ $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}$.



$\therefore \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.