**专题二 圆锥曲线中的定点问题**

**山东省泰安第一中学 刘海松**

**一、复习目标**

**能熟练选取恰当方法解决定点、定值问题，**

**提升直观想象、逻辑推理及数学运算等核心素养.**

**二、考情分析**

**定点问题一直是圆锥曲线中的热点问题，高考主要考查直线过定点问题，**

**有时也会涉及圆过定点问题．本部分主要以解答题形式考查，往往是试卷的压轴题之一，**

**一般以椭圆或抛物线为背景，考查定点问题或探索性问题，试题难度较大．**

**三、重点：证明直线或曲线过定点的方法**

**难点：结合图形寻找定点的解题思路及化简推理的过程**

**四、小题引入**

**1.已知抛物线：，设直线与抛物线交于、两点，若（为坐标原点）．则直线过定点( )．**

**A． B． C． D．**

**【解析】**

**设直线的方程为，，，**

**由消去得，则，．**

**因为，所以，即．**

**化简得．由得，所以直线的方程为，**

**所以直线经过定点．故选:C**

**变式：已知直线与抛物线相交于两点且满足(为原点)，求证:直线恒过定点，并求出该定点.**



**证明：法1：先猜后证**

**根据对称发现直线所过的定点一定在轴上，**

**再找一特殊位置，即当****轴时，此时设点****，则**



**猜出直线所过的定点为.**

**我们也可以根据此时直线的方程发现第一项象限内点的横纵坐标相等，设为（）代入抛物线方程中得，从而得到直线所过的定点为.**

**既然猜出了此定点，要证明直线过该定点，只需证明 。**

**三点共线.设点，**

****

****

****

**因为直线斜率一定存在，所以设直线，联立**

**又，以替换点中的，得到点，**

****

****

**法2:由于直线斜率为0的时候，直线仅与抛物线有一个交点，不符合题意，因此巧设直线为**

**设**

**联立**

****

**直线恒过定点**

**2.已知点在抛物线上且位于轴的两侧，（其中为坐标原点），则直线一定过点（ ）**

**A． B． C． D．**

**【详解】当直线的斜率为0时，直线与抛物线只有1个交点，不符合题意，所以直线的斜率不为0，设其方程为，因为点在抛物线上，所以设，所以，解得或．又因为两点位于轴的两侧，所以．联立得****，所以，即，所以直线的方程为，所以直线一定过点．故选A**

**3.对于任意实数，方程所表示的曲线恒过定点（ ）**

**A.  B.   
C.  D. **

**法一：找两个特殊圆联立解出定点：和时，两个圆的方程联立**

**法二：曲线**

**分参可化为** **解方程组****可得恒过定点．故选B．**

**4.已知点是直线上的动点，过点作椭圆的两条切线，**

**切点分别是，当点运动时，切点弦所在的直线过定点，则这个定点为 .**

**结论：**

**(1)过圆外一点所引的两条切线的切点弦方程为**

**(2)过椭圆外一点所引的两条切线的切点弦方程为.**

**(3)过双曲线****外一点所引的两条切线的切点弦方程为****.**

**(4)过抛物线外一点所引的两条切线的切点弦方程为**

**法一：取直线上的两个特殊点，比如**，，**过这两个点的切点弦直线分别是**

**和，联立即可求得直线所过的定点**

**法二：设点，则切点弦所在的直线方程为，**

**分参化简为**

**所以切点弦所在的直线过定点**

**5.已知椭圆，过点且斜率为****的动直线****交椭圆于A，B两点，**

**则以为直径的圆恒过定点，这个定点为 .**

**解析：设直线，代入，有.**

**设，则，**

**由对称性可知，定点一定在轴上，故设为，，，**

**由题意知，对任意实数都有恒成立，**

** **

****

**恒成立，**

**即对恒成立.**

**，解得， 定点为**

**在轴上存在定点,使以为直径的圆恒过这个定点.**

**五、方法总结**

**证明曲线过定点，一般有两种方法.**

**(1)特殊到一般法，根据动点、动线的对称性，结合其特殊位置或极限位置探索出定点，再证明该定点与变量无关，属于“先猜再证”；如果是直线过定点，先猜出定点再证三点共线；如果是圆过定点，先猜出定点再证数量积等于0.**

**(2)引进参数法：引进动点的坐标或动线中系数（****）为参数表示变化量，通过分离参数找到定点，若分离参数得到等式（一般地，为关于的二元一次关系式）由上述原理可得方程组从而求得该定点.**

**若分离参数得到等式，（一般地，为关于的二元一次关系式）由上述原理可得方程组，从而求得该定点.**

**特别地，求解动直线过定点问题，斜率存在时一般可先设出直线的斜截式方程：****，这时引入了两个变量****，然后利用题中等量关系解出****的关系，若****，代入****得，则该直线过定点.**

**六、常见过定点的模型**

**1.切点弦恒过定点模型：过已知直线****上的动点作已知圆锥曲线的两条切线，则过两切点的直线必过定点.记作：“直线动点，切弦定点”.**

**2.过圆锥曲线(不包括等轴双曲线)上的一个定点****任作两条互相垂直的弦****，则直线****必过定点，记作：“直周之角，斜过定点”**．

**3.在圆锥曲线中，相互垂直的两条弦的中点连线必过定点 记作：“正交中点，连线定点”.**

**4.过在轴上的点作直线与圆锥曲线交于不同的两点，点****关于****轴的对称点（点与****不重合），则直线必过定点，且这个定点在轴上.**

**5.一般地，是圆锥曲线上两动点，点为该圆锥曲线上的一个定点，的倾斜角分别为，则以下条件均可推出直线过定点：**

**①（非零常数）； ②（非零常数）；**

**③为定值； ④为常数．**

**6. 过圆锥曲线外一点，任作一直线交圆锥曲线于两点，过点作斜率为定值(是直线与圆锥曲线交点处的切线斜率)的直线交椭圆于另一点，则弦必过定点.**

**记作：“斜率定值，弦过定点”.**

**7.已知点为圆锥曲线上一点，若该圆锥曲线在点处的切线交准线于点，则以线段为直径的圆恒过与该准线对应的焦点．**

**8.已知曲线的左顶点为，过右焦点的直线交曲线于点，直线分别交右准线于点，则以为直径的圆必过．**

**六、例题讲解**

**例题1（2020·新高考Ⅰ卷·22·）已知椭圆C：的离心率为，且过点A（2，1）．**

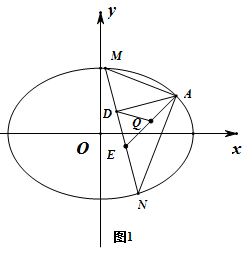
**（1）求****的方程：**

**（2）点****在C上，且****，****，****为垂足．证明：存在定点****，使得****为定值．**

**【分析】设出点M，N的坐标，在斜率存在时设方程为, 联立直线方程与椭圆方程，根据已知条件，已得到m,k的关系，进而得直线MN恒过定点，在直线斜率不存在时要单独验证，然后结合直角三角形的性质即可确定满足题意的点Q的位置.**

**解析：(1)由题意可得：****，**

**解得：****，故椭圆方程为：.**

**(2)法1：设点，**

**当直线MN的斜率存在时，设方程为,如图1.**

**代入椭圆方程消去并整理得：,**

** ②,**

**因为AM⊥AN，∴，**

**即,①**

**根据,代入①整理可得：**

**将②代入，，**

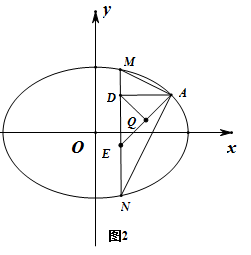
**整理化简得,**

**∵不在直线上，∴，**

**∴，**

**于是MN的方程为，**

**所以直线过定点直线过定点.**

****②**当直线MN的斜率不存在时，可得,如图2.**

**代入得****,**

**结合,解得****,**

**此时直线MN过点,**

**由于AE为定值，且△ADE为直角三角形，AE为斜边，**

**所以AE中点Q满足为定值（AE长度的一半）.**

**由于，故由中点坐标公式可得.**

**故存在点，使得|DQ|为定值.**

**法2：猜出定点**后，只需证明三点共线

**当直线****斜率存在且不为零时，**

**设直线**

**然后联立**

****

****

**用替换，得到点**

**，**

****

**显然**

，三点共线，

**当直线中一条斜率为零，一条斜率不存在时，比如当直线斜率为0，**

**直线斜率不存在时，点，，，三点仍然共线，符合题意.**

**, 以下同法法一**

**法3：平移椭圆法：**

****

**联立**

****



****

**，代入中，得恒过定点，**

**然后将此定点向右平移2个单位，在向上平移一个单位得到变换前直线所恒过的定点，以下同法一**

**另外还有一种计算更简单的一种方法，转化为齐次式，这时候应该将不过原点的直线设为联立平移后的椭圆得**

****

**两边同时除以，得（\*）**

**当时，此时直线的斜率是上面关于的方程的两个根，**

****

**当时，或，比如当时，，此时，**

**直线，显然也过点.以下同上**

**例题2（2020·新课标Ⅰ卷·理·20·★★★★★）**

***6***

***3***

*O*

**G**

***A***

***B***

***P***

***C***

***D***

**已知A、B分别为椭圆的左、右顶点，G为E的上顶点，.P为直线上的动点，PA与E的另一交点为C，PB与E的另一交点为D.**

**（1）求E的方程；**

**（2）证明：直线CD过定点.**

**【解析】法一：（1）由题意，，，，故，，**

**所以，解得：或（舍去），故E的方程为.**

**（2）解法1：由（1）知，，设，，，**

**当时，直线PA的方程为，代入消去****化简得：**

**解得：或，所以，故，从而，**

**直线的方程为，代入消去****化简得：**

**解得：或，所以，从而，故，**

**，****，，即，故，**

**所以T、C、D三点共线，从而直线CD过定点**

**当时，易得C、D分别与B、A重合，所以直线CD即为x轴，显然直线CD也过点T,**

**综上所述，直线CD过定点**

**解法2：连接**，**由（1）知，，设，，**

**当时，由图可知点C不与点B重合，因为，所以，**

**故CA、CB的斜率之积为①，**

**又PA的斜率****，PB的斜率****，所以，**

**代入式①化简得：BC、BD的斜率之积**

**显然CD不与****轴平行，否则AC与BD的交点在轴上，故可直线CD的方程为，**

**联立消去整理得：，**

**判别式**

**所以，由韦达定理，，**

**所以，**

**，故**

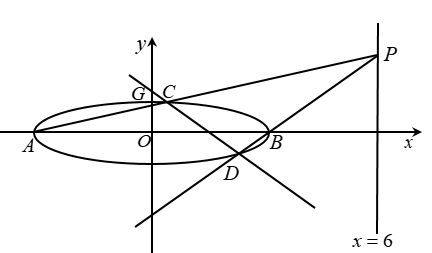
**即，整理得：，解得：或3，**

**若，则C、D中有一个点与B重合，不合题意，所以，满足，即直线CD过定点，**

**当时，易得C、D分别与B、A重合，所以直线CD即为轴，也过点**

**综上所述，直线CD过定点.**

法3：本质同法1：（1）依据题意作出如下图象：



由椭圆方程可得：， ，

，

，

椭圆方程为：

（2）[方法一]：设而求点法

证明：设，

则直线的方程为：，即：

联立直线的方程与椭圆方程可得：，整理得：

，解得：或

将代入直线可得：

所以点的坐标为.

同理可得：点的坐标为

当时，

直线的方程为：，

整理可得：

整理得：

所以直线过定点．

当时，直线：，直线过点．

故直线*CD*过定点．

**法:4：二次曲线系法**

**设，则直线的方程为，即．**

**同理，可求直线的方程为．**

**则经过直线和直线的方程可写为．**

**可化为．④**

**易知*A*，*B*，*C*，*D*四个点满足上述方程，同时*A*，*B*，*C*，*D*又在椭圆上，则有，**

**代入④式可得．**

**故，可得或．**

**其中表示直线，则表示直线．**

**令，得，即直线恒过点．**

**七、真题演练**

**（2022·全国乙（文）T）21. 已知椭圆*E*的中心为坐标原点，对称轴为*x*轴、*y*轴，且过两点．**

**（1）求*E*的方程；**

**（2）设过点的直线交*E*于*M*，*N*两点，过*M*且平行于*x*轴的直线与线段*AB*交于点*T*，点*H*满足．证明：直线*HN*过定点．**

**解：（1）设椭圆*E*的方程为，过，**

**则，解得，，所以椭圆*E*的方程为：.**

**（2），所以，**

**①若过点的直线斜率不存在，直线.代入，**

**可得，，代入*AB*方程，可得**

**，由得到.求得*HN*方程：**

**，过点.**

**②若过点的直线斜率存在，设.**

**联立得，**

**可得，，且**

**联立可得**

**可求得此时，**

**将，代入整理得，**

**将代入，得**

**显然成立，**

**综上，可得直线*HN*过定点**

**八、小结**

**1.本节课重点讲评了证明直线恒过定点的方法**

**①先猜后证：从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；  
②引入参数分参法：引进动点的坐标(x0,y0)或动线中系数（k,t）为参数表示变化量，**

**通过分离参数找到定点；**

**③平移椭圆或利用两条动直线构造二次曲线系.**

**2.注重细节的处理**

**①设直线方程时，讨论动直线斜率是否存在；**

**②利用特殊位置和极限思想迅速猜出定点；**

**③巧设方程或动点，把握计算技巧，提升化简计算的速度和准度.**

**九、作业**

**1.【2019年高考北京卷理数】已知抛物线经过点．**

**（1）求抛物线的方程及其准线方程；**

**（2）设为原点，过抛物线的焦点作斜率不为0的直线交抛物线于两点，直线分别交直线于点．求证：以为直径的圆经过轴上的两个定点．**

**【解析】（1）由抛物线经过点，得.**

**所以抛物线的方程为，其准线方程为.**

**（2）抛物线的焦点为.**

**设直线的方程为.**

**由得.**

**设，则.**

**直线的方程为.**

**令，得点A的横坐标.**

**同理得点B的横坐标.**

**设点，则，**

**.**

**令，即，则或.**

**综上，以AB为直径的圆经过y轴上的定点和.**

**2.（2017全国新课标.理科.）已知椭圆，4点，，，中恰有3点在椭圆C上.**

**（1）求C的方程；**

**（2）设直线l不经过点且与C相交于A、B两点．若直线与直线的斜率的和为，证明：****过定点.**

**【解析】（1）由题意，和关于y轴对称，所以它们都在椭圆C上或都不在椭圆C上，而所给四点恰有3点在椭圆C上，所以和必定都在椭圆C上，从而不在椭圆C上，**

**故在椭圆C上的三个点是、、，所以，，故，椭圆C的方程为.**

**（2）解法1：显然直线l不与y轴垂直，否则直线与直线的的斜率的和为0,**

**故可设l的方程为，设，，**

**联立消去x整理得：，**

**判别式，所以①，**

**由韦达定理，，，**

**所以，**

**从而**

**，**

**所以，代入①得：，又，所以，从而**

**故直线l的方程为，所以直线l过定点.**

**解法2：当直线轴时，设，则，所以**

**因为，所以，不合题意，**

**当直线l不与x轴垂直时，设其方程为，设，**

**联立，消去y整理得：**

**判别式，所以①，**

**由韦达定理，，，**

**故**

**，**

**所以，代入①得：，又，所以，从而**

**故直线l的方程为，所以直线l过定点.**

**解法3：（1）根据椭圆对称性可得，*P*1（1,1）*P*4（1，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。）不可能同时在椭圆上，*P*3（–1，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。），*P*4（1，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。）一定同时在椭圆上，因此可得椭圆经过*P*2（0,1），*P*3（–1，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。），*P*4（1，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。），代入椭圆方程可得：高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，故而可得椭圆的标准方程为：高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。。**

**（2）由题意可得直线*P*2*A*与直线*P*2*B*的斜率一定存在，不妨设直线*P*2*A*为：高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。,*P*2*B*为：高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。.联立高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，假设高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。此时可得：**

**高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，此时可求得直线的斜率为：**

**高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，化简可得高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，此时满足高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。。**

**当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时，*AB*两点重合，不合题意。**

**当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时，直线方程为：高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，即高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，当高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。时，高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。，因此直线恒过定点高考资源网(ks5u.com),中国最大的高考网站,您身边的高考专家。。**

**3．已知椭圆的离心率为，椭圆上的点到右焦点的最近距离为，若椭圆与轴交于两点，是椭圆上异于的任意一点，直线交直线于点，直线交直线于点．**

**（1）求椭圆的方程；**

**（2）试探求以为直径的圆是否恒经过轴上的定点？若经过，求出定点的坐标；若不经过，请说明理由．**

**解析：（1）由题意得： ，**

**椭圆的方程为：**

**（2）记直线、的斜率分别为、，设的坐标分别为，，，所以， .**

**因为在椭圆上，所以，所以，，**

**设， ，则，，**

**所以，又.**

**.**

**因为的中点为，，**

**所以，以为直径的圆的方程为：.**

**令，得，**

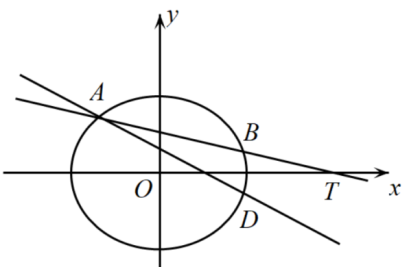
**所以**

**将两点代入检验恒成立.**

**所以，以为直径的圆恒过轴上的定点**

**4.已知椭圆*C*：的右顶点是*M*（2，0），离心率为．**

**(1)求椭圆*C*的标准方程．**

**(2)过点*T*（4，0）作直线*l*与椭圆*C*交于不同的两点*A*，*B*，点*B*关于*x*轴的对称点为*D*，问直线*AD*是否过定点？若是，求出该定点的坐标；若不是，请说明理由．**

**【解析】**

**（1）由右顶点是*M*（2，0），得*a*＝2，又离心率，所以，**

**所以，所以椭圆*C*的标准方程为．**

**（2）设，，显然直线*l*的斜率存在．**

**直线*l*的方程为，联立方程组**

**消去*y*得，由，得，**

**所以，．**

**因为点，所以直线*AD*的方程为．**

**又，**

**所以直线*AD*的方程可化为，**

**即，**

**所以直线*AD*恒过点（1，0）．**

**（方法二）设，，直线*l*的方程为，**

**联立方程组消去*x*得，**

**由，得或，所以，．**

**因为点，则直线*AD*的方程为．**

**又，**

**所以直线*AD*的方程可化为**

**，**

**此时直线*AD*恒过点（1,0），**

**当直线*l*的斜率为0时，直线*l*的方程为*y*＝0，也过点（1，0）．**

**综上，直线*AD*恒过点（1，0）．**