第六章　平面向量及其应用

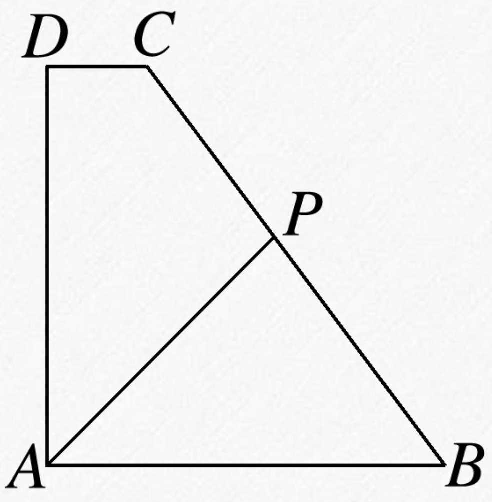
培优课　平面向量中的最值与范围问题

平面向量中的范围、最值问题是热点问题，也是难点问题，此类问题综合性强，体现了知识的交汇组合，其基本题型是根据已知条件求某个变量的范围、最值，比如向量的模、数量积、向量的夹角、参数的范围等等，解题思路是建立目标函数的函数解析式，转化为求函数的最值，同时向量兼顾“数”与“形”的双重身份，所以解决平面向量的范围、最值问题的另外一种思路是数形结合.

内容索引

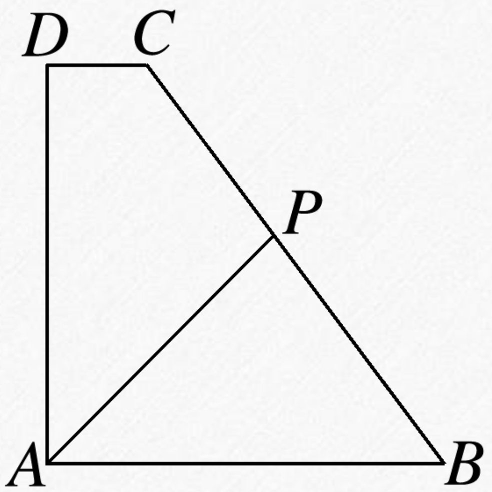
一
向量线性运算中的最值与范围问题

例1 如图，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle DAB=90°$，$AD=AB=4$，$CD=1$，动点 P 在边 BC 上，且满足$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$($m$，$n$ 均为正实数)，求$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}$的最小值.



解

由题意得$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$，



所以$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}$

$=m\overrightarrow{AB}+n\left(\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$

$=\left(m-\frac{1}{4}n\right)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

由P，B，C三点共线得，

$m-\frac{1}{4}n+n=m+\frac{3}{4}n=1(m，n>0)$，

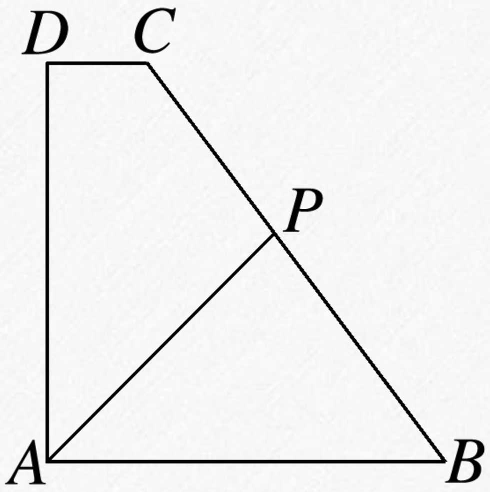
解

所以$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\left(m+\frac{3}{4}n\right)$

$=\frac{7}{4}+\frac{3n}{4m}+\frac{m}{n}\geqslant\frac{7}{4}+2\sqrt{\frac{3n}{4m}\cdot\frac{m}{n}}$

$=\frac{7}{4}+\sqrt{3}=\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$(当且仅当$3n^2=4m^2$，即

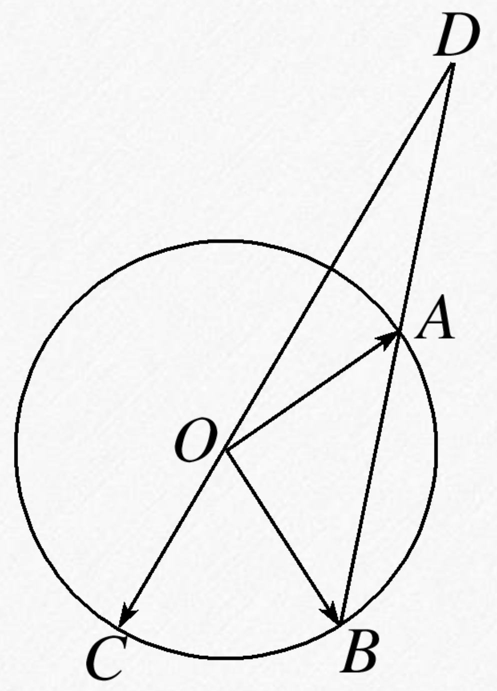
$\begin{cases}m=4-2\sqrt{3},\\n=-4+\frac{8\sqrt{3}}{3}\end{cases}$时取等号)，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为$\frac{7+4\sqrt{3}}{4}$.



反思感悟

利用向量的概念及基本运算，将所求问题转化为相应的等式关系，然后用基本不等式求最值.

跟踪训练1 如图所示，A，B，C 是圆 O 上的三点，CO 的延长线与 BA 的延长线交于圆 O 外一点 D.若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则 $m+n$ 的取值范围是<u>(－1,0)</u>.



解析

由点D是圆O外一点，

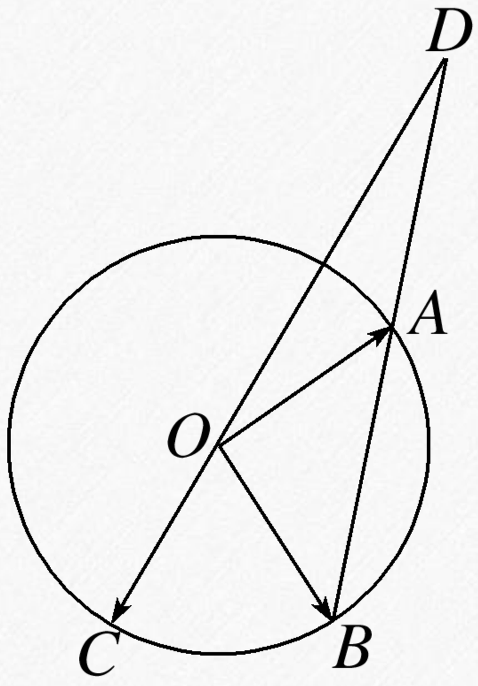
可设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}(\lambda>1)$，

则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

又因为 C，O，D 三点共线，令$\overrightarrow{OD}=-\mu\overrightarrow{OC}(\mu>1)$，

则$\overrightarrow{OC}=-\dfrac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1-\lambda}{\mu}\overrightarrow{OB}(\lambda>1,\ \mu>1)$，

所以 $m=-\dfrac{\lambda}{\mu}$，$n=-\dfrac{1-\lambda}{\mu}$，则 $m+n=-\dfrac{\lambda}{\mu}-\dfrac{1-\lambda}{\mu}=-\dfrac{1}{\mu}\in(-1,0)$.



返回

二

向量数量积的最值与范围问题

例2 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中，M 为边 BC 的中点，点 E 在线段 AB 上运动，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}$的取值范围是

A.$\left[\frac{1}{2}，2\right]$

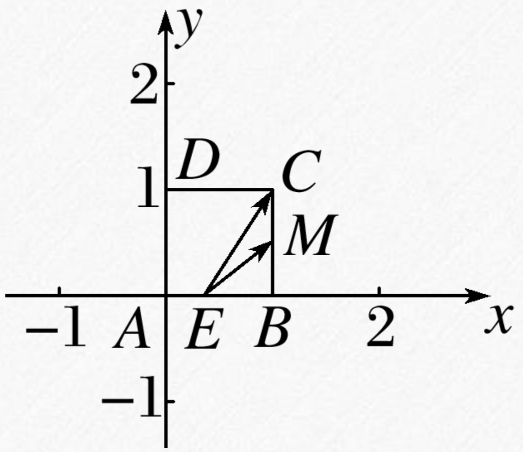
B.$\left[0，\frac{3}{2}\right]$

C.$\left[\frac{1}{2}，\frac{3}{2}\right]$

D.$[0,1]$

解析

将正方形放入如图所示的平面直角坐标系中，设$E(x,0)$，$0\leqslant x\leqslant 1$.



则 $M\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$C(1,1)$，

所以$\overrightarrow{EM}=\left(1-x,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{EC}=(1-x,1)$，

所以$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}=(1-x,1)\cdot\left(1-x,\ \dfrac{1}{2}\right)=(1-x)^2+\dfrac{1}{2}$.

因为 $0\leqslant x\leqslant 1$，所以$\dfrac{1}{2}\leqslant(1-x)^2+\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，

即$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EM}$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right]$.

反思感悟

建立适当的坐标系，将平面向量数量积的运算坐标化，然后利用二次函数、基本不等式等求最值或范围.

跟踪训练2 在等腰梯形 $ABCD$ 中，已知 $AB /\!/ DC$，$AB=2$，$BC=1$，$\angle ABC=60°$.动点 E 和 F 分别在线段 BC 和 DC 上，且$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最小值为__$\frac{29}{18}$__.

解析

根据题意，可知 $DC=1$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF})=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC})\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9\lambda}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=1+\frac{2}{9\lambda}+\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{18}\geqslant 1+2\sqrt{\frac{1}{9}}-\frac{1}{18}=\frac{29}{18}$，当且仅当 $\lambda=\frac{2}{3}$时，等号成立.

返回

三

向量模的最值问题

例3 向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为$\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

解析

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$

$=1-2\times1\times|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}+|\boldsymbol{b}|^2$

$=|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{b}|+1=\left(|b|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,

所以$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当$|\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}$时取得最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

反思感悟

求向量模的最值(或范围)的方法

利用平面向量数量积的概念和性质，建构关于模长的函数模型，利用三角函数或二次函数求解模长的最值(或范围).

跟踪训练3 已知$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$的最大值为__$\frac{4\sqrt{3}}{3}$__.

解析

将$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$两边平方并化简得$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=4$，

由基本不等式得$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant\left(\frac{|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|}{2}\right)^2=\frac{(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2}{4}$，

故$\frac{3}{4}(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant 4$，即$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2\leqslant\frac{16}{3}$，即$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时，等号成立，所以$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

四

向量夹角的最值问题

例4 已知$|\boldsymbol{a}|=1$，向量$\boldsymbol{b}$满足$2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，设$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为$\theta$，则$\cos\theta$的最小值为__$\frac{2\sqrt{5}}{5}$__.

解析

$\because |\boldsymbol{a}|=1$，$\therefore$设$\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(x，y)$，

$\therefore \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(x-1，y)$，

由 $2|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ 得，$2\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$，则 $x>0$，

$\therefore 4(x-1)^2+4y^2=x^2$，

$\therefore y^2=-\frac{3}{4}x^2+2x-1$，

$\therefore \cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-\frac{3}{4}x^2+2x-1}}=\frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2x-1}}$

解析

$$=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{2}{x}+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+\frac{5}{4}}},$$

$\therefore$当$\frac{1}{x}=1$即$x=1$时，$\cos\theta$取最小值$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

反思感悟

将向量夹角的大小问题转化为夹角余弦值的大小问题，利用函数求最值或范围.

跟踪训练4 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}=(t,2\sqrt{2}-t)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，且$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的最小值为

A.$\frac{\pi}{6}$　　B.$\frac{\pi}{4}$　　C.$\frac{\pi}{3}$　　D.$\frac{\pi}{2}$

解析

因为$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^2$，

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2t^2-4\sqrt{2}t+8}},$$

又因为 $2t^2-4\sqrt{2}t+8=2[(t-\sqrt{2})^2+2]\geqslant2[(\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+2]=4$，

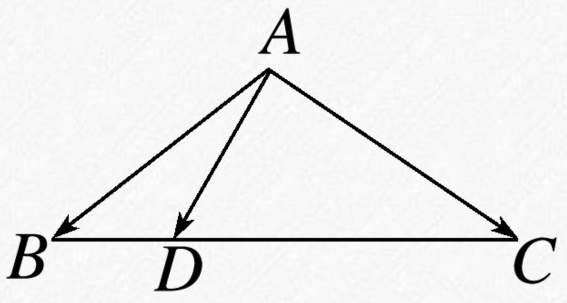
所以 $0<\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\frac{1}{2}$，

所以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角的最小值为$\frac{\pi}{3}$.

返回

课时对点练

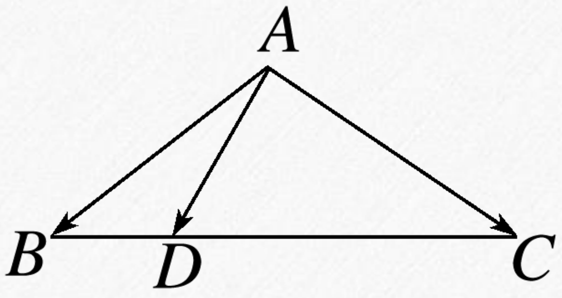
1.如图，在△ABC 中，点 D 是线段 BC 上的动点，且$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$的最小值为



A.3　　B.4　　C.5　　D.9

解析

由图可知x，y均为正，且$x+y=1$，



所以$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)(x+y)=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}$

$\geqslant 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=9$，当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{4x}{y}$，

即 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$时等号成立，

则$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}$的最小值为 9.

2.在△ABC中，$AB=\sqrt{3}$，$BC=2$，$\angle B=150°$，点D是AC边上的一点(包括端点)，点M是AC的中点，则$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值范围是

A.$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

B.$\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$

C.$\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]$

D.$[0,1]$

解析

因为点M是AC的中点，

所以$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

因为点D是AC边上的一点(包括端点)，

所以$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{CA}$，$\lambda\in[0,1]$，

即$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}-\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot[\lambda\overrightarrow{BA}+(1-\lambda)\overrightarrow{BC}]$

解析

$=\frac{1}{2}\lambda\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(1-\lambda)\overrightarrow{BC}^2.$

因为 $AB=\sqrt{3}$，$BC=2$，$\angle B=150°$，

所以$\overrightarrow{BA}^2=3$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-3$，$\overrightarrow{BC}^2=4$，

所以$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda.$

因为 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，则 $0\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda\leqslant\frac{1}{2}.$

故$\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BD}$的取值范围是$\left[0,\ \frac{1}{2}\right].$

3.设 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$，点 P 是线段 AB 上的一个动点，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$，若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$，则实数 λ 的取值范围是

A.$\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant1$

B.$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant1$

C.$\frac{1}{2}\leqslant\lambda\leqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.$1-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析

$\because \overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}=(-\lambda，\lambda)$，$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}=(1-\lambda，\lambda)$，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}$

$\geqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$,

$\therefore(1-\lambda，\lambda)\cdot(-1,1)\geqslant(\lambda，-\lambda)\cdot(\lambda-1,1-\lambda)$，

$\therefore 2\lambda^2-4\lambda+1\leqslant 0$，解得 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为点P是线段AB上的一个动点，

所以 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，即满足条件的实数 λ 的取值范围是 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\lambda\leqslant 1$.

4.设 $0\leqslant\theta<2\pi$，已知两个向量 $\overrightarrow{OP_1}=(\cos\theta, \sin\theta)$，$\overrightarrow{OP_2}=(2+\sin\theta, 2-\cos\theta)$，则向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的长度的最大值是

A.$\sqrt{2}$　　B.$\sqrt{3}$　　C.$3\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{3}$

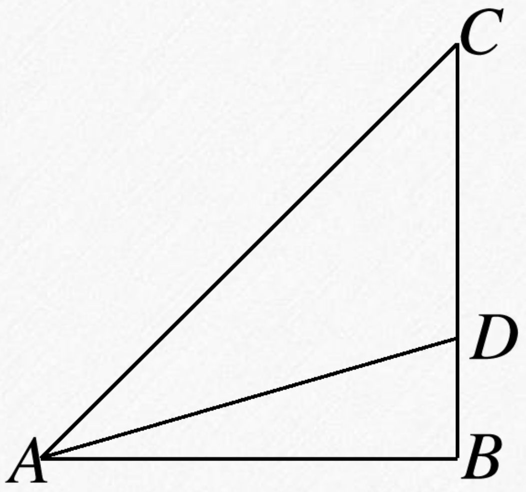
解析

$\because \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=(2+\sin\theta-\cos\theta, 2-\cos\theta-\sin\theta)$，

$\therefore |\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(2+\sin\theta-\cos\theta)^2+(2-\cos\theta-\sin\theta)^2}=\sqrt{10-8\cos\theta}\leqslant3\sqrt{2}$.

当 $\cos\theta=-1$ 时，$|\overrightarrow{P_1P_2}|$有最大值 $3\sqrt{2}$.

5.如图，在△ABC 中，已知 $AB=2$，$AC=3$，$\angle BAC=\theta$，点 D 为 BC 的三等分点.则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$的取值范围为



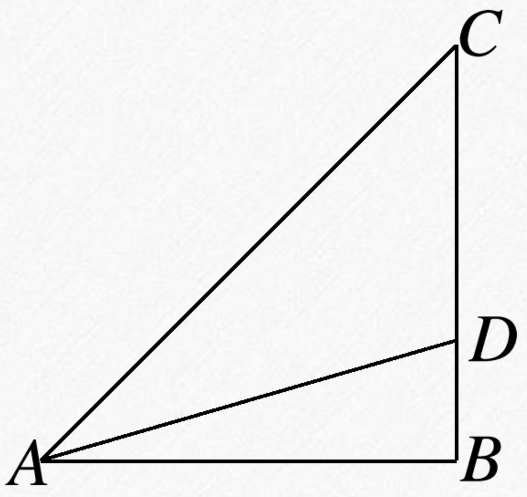
A.$\left(-\frac{11}{3},\ \frac{13}{3}\right)$

B.$\left(\frac{1}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

C.$\left(-\frac{5}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

D.$\left(-\frac{5}{3},\ \frac{55}{3}\right)$

解析



$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=-\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{3}|\overrightarrow{AC}|^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-\frac{2}{3}\times 4+\frac{1}{3}\times 9+\frac{1}{3}\times 2\times 3\cos\theta=2\cos\theta+\frac{1}{3}$.

$\because -1<\cos\theta<1$, $\therefore -\frac{5}{3}<2\cos\theta+\frac{1}{3}<\frac{7}{3}$. $\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\in\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

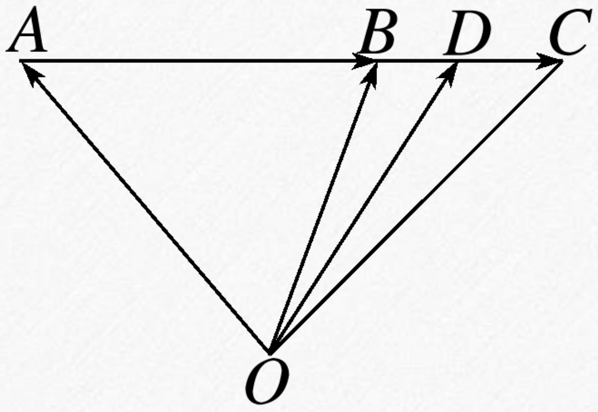
6.如图，延长线段 AB 到点 C，使得$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，点 D 在线段 BC 上运动，点 $O\notin$直线 AB，满足$\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda\mu$ 的取值范围是

A.$\left[-\frac{3}{2}，0\right]$

B.$\left[-2，\frac{2}{3}\right]$

C.$\left[-\frac{3}{4}，0\right]$

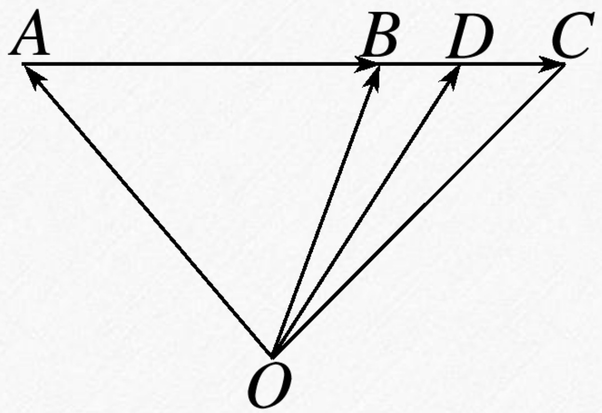
D.$[-1,1]$



解析

不妨设$AB=2BC=2$，$BD=x$，$x\in[0,1]$，由平面向量三点共线可知，

$\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{2+x}\overrightarrow{OD}+\dfrac{x}{2+x}\overrightarrow{OA}$,



$\therefore\overrightarrow{OD}=\dfrac{2+x}{2}\overrightarrow{OB}-\dfrac{x}{2}\overrightarrow{OA}$,

$\therefore\lambda=-\dfrac{x}{2}$, $\mu=\dfrac{2+x}{2}$, $x\in[0,1]$,

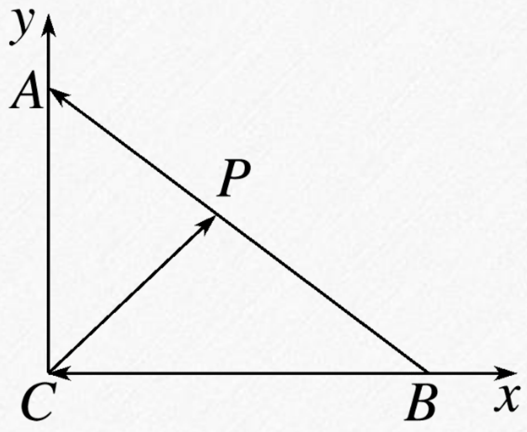
则 $\lambda\mu=-\dfrac{(2+x)x}{4}=-\dfrac{1}{4}(x^2+2x)=-\dfrac{1}{4}(x+1)^2+\dfrac{1}{4}$, $x\in[0,1]$,

$\therefore\lambda\mu\in\left[-\dfrac{3}{4}, 0\right]$.

7.已知△ABC 的三边长 $AC=3$，$BC=4$，$AB=5$，P 为 AB 边上任意一点，则$\overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$的最大值为__9__.

解析

根据题意，以C为坐标原点，CB，CA所在直线分别为x轴、y轴建立平面直角坐标系，如图，



$\therefore A(0,3)$，$B(4,0)$，$C(0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,\ -3)$,

设$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\in[0,1])$,

则$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{AB}=(0,3)+(4\lambda,-3\lambda)=(4\lambda,3-3\lambda),\lambda\in[0,1]$,

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=(4\lambda,3-3\lambda)\cdot(0,3)=9-9\lambda\in[0,9]$，

$\therefore \overrightarrow{CP}\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$的最大值为 9.

8.在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC})=0$，则$\cos A$的最小值为$\underline{\quad \frac{4}{5} \quad}$.

解析

在△ABC 中，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC})$

$=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC})$

$=-4|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2+5\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=-4|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2+5|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=0$，

在△ABC 中，设$|\overrightarrow{AC}|=b$，$|\overrightarrow{AB}|=c$，

则有 $-4b^2-c^2+5bc\cos A=0$，

所以 $\cos A=\dfrac{4b^2+c^2}{5bc}\geqslant\dfrac{2\sqrt{4b^2\cdot c^2}}{5bc}=\dfrac{4}{5}$，当且仅当 $2b=c$ 时，等号成立.

9.窗花是贴在窗纸或窗户玻璃上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术之一，每年新春佳节，我国许多地区的人们都有贴窗花的习俗，以此达到装点环境、渲染气氛的目的，并寄托着辞旧迎新、接福纳祥的愿望.图1是一张由卷曲纹和回纹构成的正六边形剪纸窗花，已知图2中正六边形$ABCDEF$的边长为2，圆O的圆心为正六边形的中心，半径为1，若点P在正六边形的边上运动，MN为圆的直径，则$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$的取值范围是__[2,3]__.

图 1

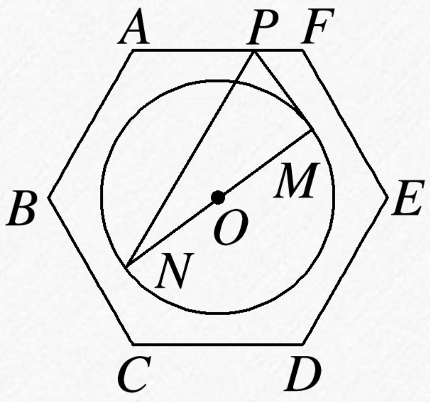
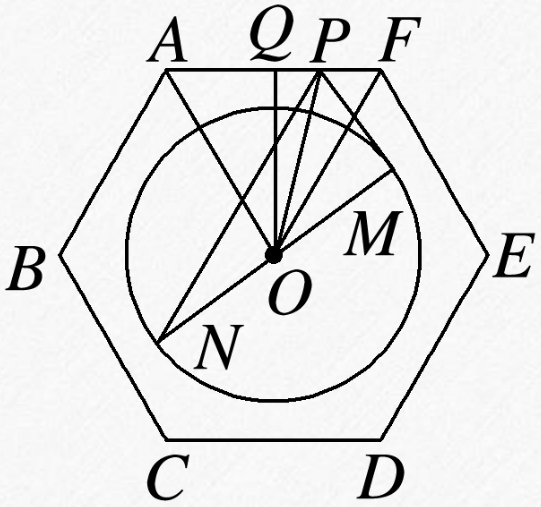


图 2

解析

如图，取AF的中点Q，根据题意，$\triangle AOF$是边长为2的正三角形，易得$|OQ|=\sqrt{3}$，



又$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$

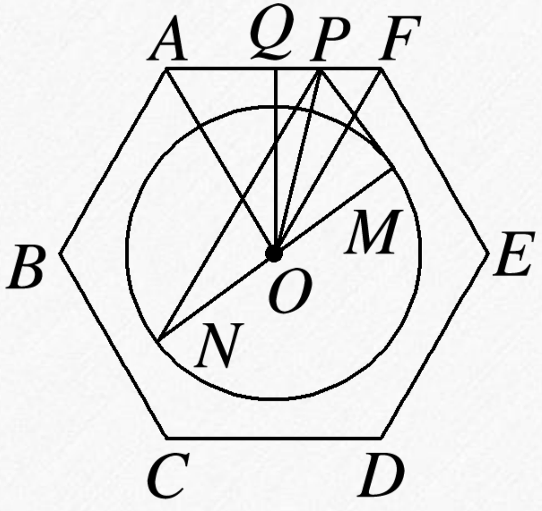
$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON})$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$

$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OM})-1=|\overrightarrow{PO}|^2-1$,

解析

根据图形可知，



当点 P 位于正六边形各边的中点时，$|PO|$有最小值为$\sqrt{3}$，此时$|\overrightarrow{PO}|^2-1=2$，

当点 P 位于正六边形的顶点时，$|PO|$有最大值为 2，此时$|\overrightarrow{PO}|^2-1=3$，

所以 $2\leqslant\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\leqslant3$.

10.已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3}，-1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(1)求与$\boldsymbol{a}$平行的单位向量$\boldsymbol{c}$；

解

设 $\boldsymbol{c}=(x,\ y)$，根据题意得$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ \sqrt{3}y+x=0.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ y=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ y=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore \boldsymbol{c}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$或 $\boldsymbol{c}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$.

(2)设$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+(t^2+3)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=-k\cdot t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，若存在$t\in[0,2]$，使得$\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$成立，求$k$的取值范围.

解

$\because \boldsymbol{a}=(\sqrt{3},\ -1)$，$\boldsymbol{b}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

$\because \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$，$\therefore \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$，即 $-kt|\boldsymbol{a}|^2+(t^2+3)|\boldsymbol{b}|^2=0$.

$\because |\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\therefore t^2-4kt+3=0$.

问题转化为关于t的二次方程$t^2-4kt+3=0$在$[0,2]$内有解.

令$f(t)=t^2-4kt+3$，

则当$2k\leqslant 0$，即$k\leqslant 0$时，$\because f(0)=3$，

解

$\therefore$方程$t^2-4kt+3=0$在[0,2]内无解；

当$0<2k\leqslant 2$，即$0<k\leqslant 1$时，由$\Delta=16k^2-12\geqslant 0$，

解得 $k\leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或 $k\geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant k\leqslant 1$；

当$2k>2$，即$k>1$时，由$f(2)\leqslant 0$得$4-8k+3\leqslant 0$，

解得 $k\geqslant \dfrac{7}{8}$，$\therefore k>1$.

综上，实数 k 的取值范围为$\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}，+\infty\right)$.