第九章 立体几何专练5—外接球（1）

一、单选题

1．在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．已知在鳖臑 $A-BCD$ 中，满足 $AB\perp$ 平面 BCD，且 $BC=3$，$CD=4$，当该鳖臑的体积为10时，它外接球的表面积为(　　)

A．25π　　B．50π　　C．100π　　D．200π

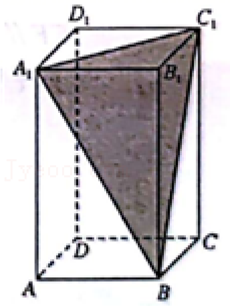
2．已知 A，B，C 为球 O 的球面上的三点，$\odot O_1$ 为 ΔABC 的外接圆，若 $AB=BC=AC=OO_1=\sqrt{3}$，则球 O 的表面积为(　　)

A．16π　　B．12π　　C．9π　　D．8π

3．在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB=2$，$AC=\sqrt{7}$，$\tan\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$PA=\sqrt{2}$，当此三棱锥的体积最大时，该三棱锥的外接球的表面积为(　　)

A．9π　　B．8π　　C．4π　　D．3π

4．如图正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面面积为36，△ A_1BC_1 的面积为 $6\sqrt{59}$，则三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为(　　)



A．68π　　B．$100\sqrt{3}\pi$　　C．172π　　D．$10\sqrt{6}\pi$

5．在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，$PA=AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$．若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为(　　)

A．4π　　B．10π　　C．12π　　D．48π

6．在四面体 $ABCD$ 中，已知平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，且 $AB=AD=DB=AC=CB=4$，其外接球表面积为(　　)

A．$\dfrac{40}{3}\pi$　　B．$\dfrac{80}{3}\pi$　　C．16π　　D．20π

7．在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABD=90^\circ$，且 $AB=1$，$BD=\sqrt{2}$，若将其沿 BD 折起使平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，则三棱锥 $A-BDC$ 的外接球的表面积为(　　)

A．2π　　B．8π　　C．16π　　D．4π

8．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=4$，$AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，$PA\perp$ 面 ABC，则此三棱

锥的外接球的体积为(　　)

A．$\frac{256\pi}{3}$　　B．256π　　C．$\frac{32\pi}{3}$　　D．32π

二、多选题

9．已知在正三棱锥 $A-BCD$ 中，底面 ΔBCD 的边长为 4，E 为 AD 的中点，$AB\perp CD$，$AB\perp CE$，下列结论正确的为(　　)

A．正三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $2\sqrt{2}$

B．三棱锥 $A-BCD$ 的外接球的表面积为 24π

C．$AD\perp BC$

D．CE 与 CD 所成角的正切值为 $\frac{3}{4}$

10．已知三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=PB=PC$，ΔABC 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，E，F 分别是 PA，AB 的中点，$\angle CEF=90^{\circ}$，则以下说法正确的是(　　)

A．$PB\perp CE$

B．PB 与平面 ABC 所成的角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C．此三棱锥外接球的体积是 $\sqrt{3}\pi$

D．此三棱锥的表面积与它的外接球的表面积的比值为 $\frac{3+\sqrt{3}}{6\pi}$

11．在三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，$AB=BC=1$，$BD=\sqrt{2}$，三棱锥 $A-BCD$ 的所有顶点均在球 O 的表面上，若点 M、N 分别为 ΔBCD 与 ΔABD 的重心，直线 MN 与球 O 的表面相交于 F、G 两点，则(　　)

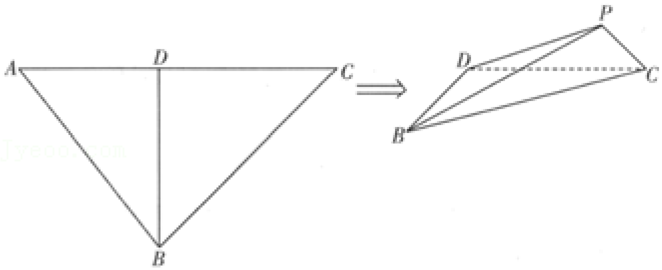
A．三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 3π

B．点 O 到线段 MN 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C．$|FG|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

D．$|FG|:|MN|=2\sqrt{3}$

12．已知 ΔABC 中，$BC=4\sqrt{2}$，$C=\frac{\pi}{4}$，BD 为边 AC 上的高，且 $AD=\sqrt{10}$，沿 BD 将 ΔABD 折起至 ΔPBD 的位置，使得 $\cos\angle PDC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，则(　　)



A．平面 $PDC \perp$ 平面 BDC

B．三棱锥 $P-BCD$ 的体积为 8

C．$PC=\sqrt{2}$

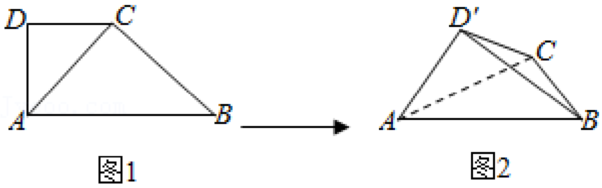
D．三棱锥 $P-BCD$ 外接球的表面积为 36π

三、填空题

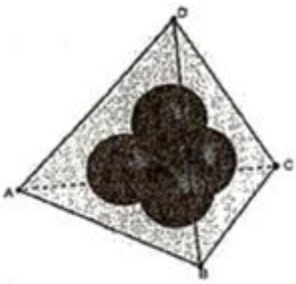
13．在三棱锥 $P-ABC$ 中，底面 ABC 是以 AC 为斜边的等腰直角三角形，且 $AB=2$，$PA=PC=\sqrt{5}$，PB 与底面 ABC 所成的角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 ____.

14. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，顶点 P 在底面的投影 O 恰为正方形 $ABCD$ 的中心，且 $PA=2\sqrt{3}$，当四棱锥 $P-ABCD$ 的体积取得最大值时，该四棱锥的外接球的表面积为 ____.

15．如图 1，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB \perp AD$，$CD \perp AD$，$AB=2AD=2CD=2$，将 ΔABC 沿 AC 折起到 $\Delta ABD'$ 的位置，得到图 2 中的三棱锥 $D'-ABC$，其中平面 $ABC \perp$ 平面 ACD'，则三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的表面积为 ____

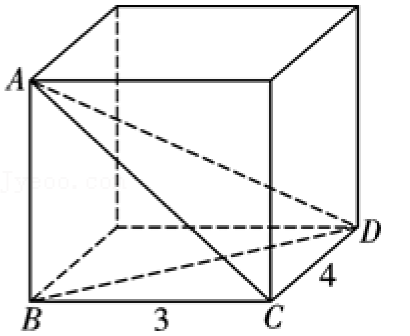


16．如图所示，半径均为 r 的四个小球两两外切，它们又内切于正四面体 $ABCD$，即正四面体的每个面均与其中三个球相切，已知正四面体的棱长为 a，则小球半径 $r=$____.



第九章 立体几何专练 5—外接球（1）答案

1．解：由题意，该鳖臑如图所示，



当鳖臑的体积为 10 时，有$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times AB=10$，

解得：$AB=5$，该鳖臑的外接球即该长方体的外接球，

设外接球半径为R，则$(2R)^2=3^2+4^2+5^2=50$，

鳖臑的外接球表面积为$4\pi R^2=50\pi$，

故选：B.

2．解：由正弦定理得ΔABC的外接圆半径r满足$2r=\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^{\circ}}$，解得$r=1$.

设球的半径为R，则由$OO_1\perp$平面ABC，得$R=\sqrt{r^2+|OO_1|^2}=2$，

所以球的表面积为$4\pi R^2=16\pi$.

故选：A.

3．解：$\because$在三棱锥$P-ABC$中，$AB=2$，$AC=\sqrt{7}$，$\tan\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$PA=\sqrt{2}$，

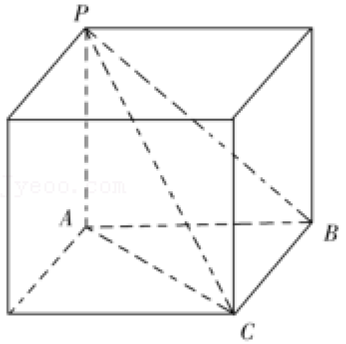
$\therefore\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，

由余弦定理得$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=4+7-2\times2\times\sqrt{7}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=3$，

$\therefore BC=\sqrt{3}$，

$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore AB\perp BC$，

如图，当$PA\perp$平面ABC时，三棱锥$P-ABC$的体积最大，



把三棱锥$P-ABC$放在长方体中，其外接球的半径为：

$R=\dfrac{\sqrt{AB^2+BC^2+PA^2}}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$当此三棱锥的体积最大时，该三棱锥的外接球的表面积为：

$S=4\pi R^2=4\times\pi\times(\dfrac{3}{2})^2=9\pi$.

故选：A .

4．解：设正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高为 h，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积为 36，$\therefore A_1B_1=B_1C_1=6$，

在 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中，由勾股定理得 $A_1C_1=6\sqrt{2}$，

在 $\mathrm{Rt\Delta BCC_1}$ 中，由勾股定理得 $BC_1^2=h^2+36$，

$\because\triangle A_1BC_1$ 的面积为 $6\sqrt{59}$，

$\therefore\dfrac{1}{2}\cdot6\sqrt{2}\cdot\sqrt{36+h^2-(3\sqrt{2})^2}=6\sqrt{59}$，解得 $h=10$，

依题意，三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 的外接球即为正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，

其半径为 $R=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6^2+6^2+10^2}=\sqrt{43}$，

$\therefore$三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $4\pi\cdot(\sqrt{43})^2=172\pi$.

故选：C .

5．解：如图，由 $PA\perp$ 平面 ABC，满足侧棱 $\perp$ 底面，求此类三棱锥外接球的问题，转化为直棱柱求解，

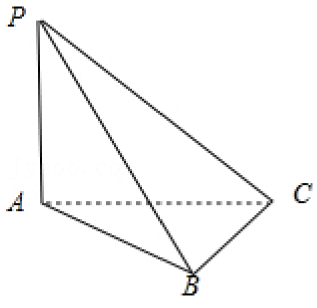
$\because AB=BC=2$，$AC=2\sqrt{2}$，$\therefore AB^2+BC^2=AC^2$，$\therefore\Delta ABC$ 为直角三角形，

$\therefore\Delta ABC$ 外接圆的半径 $r=\dfrac{1}{2}AC=\sqrt{2}$，

锥高 $h=PA=2$，

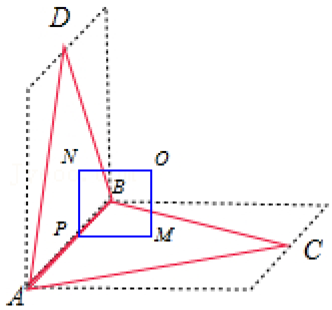
设球的半径为 R，由勾股定理 $R^2=(\dfrac{1}{2}h)^2+r^2$，可得 $R^2=1+2=3$，

$\therefore$三棱锥外接球的面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times3=12\pi$，



故选：C .

6．解：如图，



设平面 ABD 和平面 ABC 外接圆的圆心分别为 N， M，半径为 r_1， r_2，球心为 O，

$\because AB=AD=DB=AC=CB=4$，可得 $2r_1=2r_2=\dfrac{4}{\sin 60^\circ}$， $\therefore r_1=r_2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\because \Delta ABC$ 为等边三角形，$\therefore M$ 为 ΔABC 的重心，$\therefore PM=\dfrac{1}{3}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\sqrt{4^2-2^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，同理，

$NP=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

由球的性质可知，$OM\perp$ 平面 ABC，$\because PM\subset$ 平面 ABC，$\therefore OM\perp PM$，同理，$ON\perp NP$，

$\because$ 平面 $ABD\perp$ 平面 ABC，平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$， $PM\perp AB$， $PM\subset$ 平面 ABC，

$\therefore MP\perp$ 平面 ABD，$\therefore PM\perp PN$，

$\therefore$ 四边形 $OMPN$ 为正方形，$\therefore OM=NP$，

$\therefore AO^2=AM^2+OM^2$，即 $R^2=(\dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2+(\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2=\dfrac{20}{3}$，

外接球表面积为 $4\cdot\pi\cdot R^2=4\pi\times\dfrac{20}{3}=\dfrac{80\pi}{3}$，

故选：B．

7．解：如图，将 ΔABD 沿 BD 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，点 A 即 A'，

$\because$ 平面 $A'BD\perp$ 平面 BCD，平面 $A'BD\cap$ 平面 $BCD=BD$， $A'B\perp BD$， $A'B\subset$ 平面 $A'BD$，

$\therefore A'B\perp$ 平面 BCD，

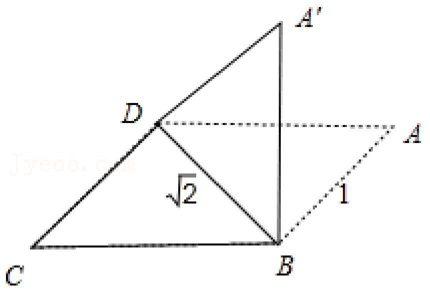
满足侧棱 $\perp$ 底面，可转化为直棱柱外接球求解，

设底面 ΔBCD 外接圆半径 r， $r=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

锥高 $h=A'B=1$，

球的半径为 R，由勾股定理可知 $R^2=(\dfrac{1}{2}h)^2+r^2$，即 $R^2=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2$， $\therefore R=1$，

所以三棱锥外接球的面积为 $4\pi\cdot R^2=4\pi$．



故选：D.

8．解：如图，

在底面ΔABC中，$\because AB=AC=2\sqrt{3}$，$BC=6$，

$\therefore \cos\angle BAC=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-6^2}{2\times 2\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}=\dfrac{-12}{24}=-\dfrac{1}{2}$，

则$\sin\angle BAC=\sqrt{1-cos^2\angle BAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

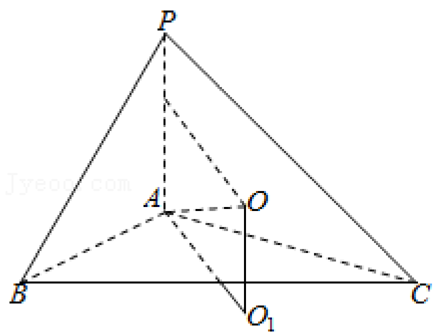
$\therefore \Delta ABC$的外接圆半径为$r=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

$\because PA\perp$面ABC，$\therefore$三棱锥外接球的半径R满足：

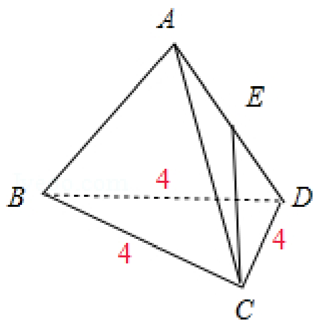
$R^2=r^2+(\dfrac{PA}{2})^2=(2\sqrt{3})^2+2^2=16$，得$R=4$，

$\therefore$三棱维$P-ABC$外接球的体积$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{256\pi}{3}$，

故选：A.



9．解：如图，



$\because AB \perp CD$， $AB \perp CE$， $CD \bigcap CE = C$， $\therefore AB \perp$ 平面 ACD，

$\because AD \subset$ 平面 ACD， $\therefore AB \perp AD$，

由题可知，三棱锥为正三棱锥， $\therefore AB = AD = AC = 2\sqrt{2}$，

$\therefore \Delta ABC$， ΔACD， ΔABD 都是等腰直角三角形，

选项 A， $V_{A-BCD} = V_{B-ACD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ACD} \cdot BA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$，故 A 错误；

选项 B，由题可知， AB， AD， AC 两两垂直，外接球半径 $R = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{6}$， $\therefore$ 外接球的面积为 $S = 4\pi R^2 = 24\pi$，故 B 正确；

选项 C，由题可知， $AD \perp AB$， $AD \perp AC$， $AB \bigcap AC = A$， $\therefore AD \perp$ 平面 ABC， $\because BC \subset$ 平面 ABC， $\therefore AD \perp BC$，故 C 正确；

选项 D，在 ΔACD 中， $CE^2 = DC^2 + DE^2 - 2DC \cdot DE \cdot \cos\angle CDE$，解得 $CE = \sqrt{10}$，

由正弦定理可知， $\frac{ED}{\sin\angle ECD} = \frac{CE}{\sin\angle CDE}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle ECD} = \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$， $\therefore \sin\angle ECD = \frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \cos\angle ECD = \frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \tan\angle ECD = \frac{1}{3}$，即 CD 与 CE 夹角的正切值为 $\frac{1}{3}$，故 D 错误；

故选： BC．

10．解：如图，由 $PA = PB = PC$， ΔABC 是边长为 $\sqrt{2}$ 的正三角形，

可知三棱锥 $P - ABC$ 为正三棱锥，

则顶点 P 在底面的射影 O_1 为底面三角形的中心，

连接 BO_1 并延长，交 AC 于 G，

则 $AC \perp BG$，又 $PO_1 \perp AC$， $PO_1 \bigcap BG = O_1$，

可得 $AC \perp$ 平面 PBG，则 $PB \perp AC$，

$\because E$， F 分别是 PA， AB 的中点， $\therefore EF // PB$，

又 $\angle CEF = 90^\circ$，即 $EF \perp CE$， $\therefore PB \perp CE$，故 A 正确；

对于 B，接 A 可得得 $PB \perp$ 平面 PAC，

$\therefore$ 正三棱锥 $P - ABC$ 的三条侧棱两两互相垂直，且 $PA = PB = PC = 1$，

$\because BO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$， $PO_1 = \sqrt{PB^2 - BO_1^{\ 2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore PB$ 与平面 ABC 所成的角的正切值为 $\frac{PO_1}{BO_1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 正确；

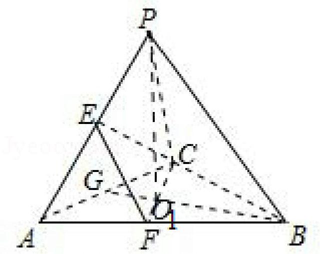
对于C，把三棱锥补形为正方体，则正方体外接球即为三棱锥的外接球，

其直径$d=\sqrt{PA^2+PB^2+PC^2}=\sqrt{3}$，此三棱锥外接球的体积是$v=\frac{4}{3}\pi\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$．故$C$错；

对于D，表面积$S=4\pi R^2=\pi\cdot(\sqrt{3})^2=3\pi$，

该三棱锥的全面积为$S=3S_{\Delta PAB}+S_{\Delta ABC}=3\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$，故$D$正确；

故选：ABD．



11．解：如图所示，三棱锥$A-BCD$可放在边长为1的正方体中，故外接球球心即为正方体的中心．

所以$R=\frac{\sqrt{3}}{2},S=4\pi R^2=3\pi$，所以$A$选项说法正确．

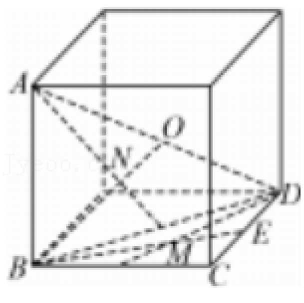
设E为CD中点，因为点M，N分别为BE，BO的远离B点的三等分点，故$|MN|=\frac{2}{3}|OE|=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}|AC|=\frac{\sqrt{2}}{3}$；

在ΔOBE中，$|OB|=\frac{\sqrt{3}}{2},|OE|=\frac{\sqrt{2}}{2},|BE|=\frac{\sqrt{5}}{2}$，由勾股定理得$BO\perp OE$，又$MN//OE$，所以$MN\perp OB$，

故点O到线段MN的距离为$|ON|=\frac{1}{3}|OB|=\frac{\sqrt{3}}{6}$，所以$B$选项说法错误．

$|FG|=2\sqrt{R^2-|ON|^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$|FG|:|MN|=\frac{2\sqrt{6}}{3}:\frac{\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{3}$，所以$C$、$D$选项说法正确．

故选：ACD．



12．解：选项A，$\because BD\perp DC$，$BD\perp DP$，$DP\bigcap DC=D$，$\therefore BD\perp$平面PDC，$\because BD\subset BDC$，

$\therefore$ 平面 $PDC \perp$ 平面 BDC，故 A 正确；

选项 B，由题可知，$BD = 4\sqrt{2}$，$\angle C = \dfrac{\pi}{4}$，$\therefore BD = DC = 4$，$\because$ $\cos\angle PDC = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin\angle PDC = \sqrt{1-(\cos\angle PDC)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\because V_{P-BCD} = V_{B-PDC} = \dfrac{1}{3}\cdot S_{PDC}\cdot BD = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times PD\times DC\times\sin\angle PDC\times BD = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 4\times\dfrac{\sqrt{10}}{10}\times 4 = \dfrac{8}{3}$，故 B 错误；

选项 C，由余弦定理可知，$PC^2 = DP^2 + DC^2 - 2DP\cdot DC\cdot\cos\angle PDC$，即 $PC = \sqrt{10+16-2\times\sqrt{10}\times 4\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}} = \sqrt{2}$，故 C 正确；

选项 D，$\because BD \perp$ 平面 PDC，满足侧棱 $\perp$ 底面，可转化为直棱柱外接球求解，

设 ΔPDC 外接圆半径为 r，$\because 2r = \dfrac{PC}{\sin\angle PCD}$，$\therefore r = \sqrt{5}$，

锥高 $h = BD = 4$，

设球的半径为 R，则由 $R^2 = (\dfrac{1}{2}h)^2 + r^2$，可得 $R^2 = 4+5 = 9$，$\therefore R = 3$，

外接球面积 $4\pi\cdot R^2 = 36\pi$，故 D 正确；

故选：ACD.

13．解：如图，取 AC 中点 D，则 $PD \perp AC$，$BD \perp AC$，所以 $AC \perp$ 平面 PBD，且 $AC = 2\sqrt{2}, BD = \sqrt{2}, PD = \sqrt{3}$.

作 $PE \perp BD$，垂足为 E，所以 $AC \perp PE$，故 $PE \perp$ 平面 ABC，$\angle PBE$ 即为 PB 与平面 ABC 所成角，即 $\cos\angle PBD = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

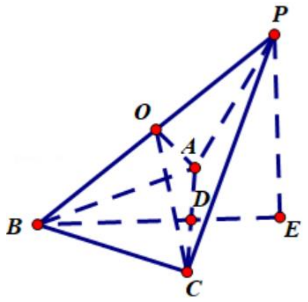
在 ΔPBD 中，由余弦定理得 $PB^2 = PD^2 + BD^2 - 2DB\cdot DP\cdot\cos\angle PDB$，代入数据，解得 $PB = 3$.

所以在 ΔPAB，ΔPBC 中，$PB = 3$，$AB = CB = 2$，$PA = PC = \sqrt{5}$，利用勾股定理得 $PC \perp CB$，$PA \perp AB$，

取 PB 中点 O，由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得 $OP = OB = OA = OC$，所以 O 为外接球球心，PB 为直径.

所以外接球的表面积为 $4\pi\cdot(\dfrac{3}{2})^2 = 9\pi$.

故答案为：9π.



14．解：设 $PO=h$， $AB=a$，则 $AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$．

在 $\mathrm{Rt}\Delta\mathrm{PAO}$ 中， $PA^2=AO^2+PO^2$，所以 $h^2+\dfrac{1}{2}a^2=12$．

所以 $V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}a^2h=\dfrac{1}{3}h(24-2h^2)=\dfrac{2}{3}(-h^3+12h)$．

设 $f(h)=-h^3+12h$， $f'(h)=-3h^2+12=-3(h+2)(h-2)$，

所以 $f(h)$ 在 $(0,2)$ 上递增， $(2,+\infty)$ 上递减，故当 $h=2$ 时， $f(h)$ 有最大值，即四棱锥的体积最大．此时 $a=4$．

该四棱锥的外接球的球心在直线 PO 上，设半径为 R，则 $R^2=(h-R)^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a)^2$，解得 $R=3$．

所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=36\pi$．

故答案为： 36π．

15．解：图 1，在 ΔADC 中，$\because CD\perp AD$， $AD=DC=1$，$\therefore AC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$， $\angle DAC=45^\circ$，

在 ΔACB 中，由余弦定理可知 $BC=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times 2\times\cos 45^\circ}=\sqrt{2}$，

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore AC\perp BC$，

图 2，$\because$ 平面 $ABC\perp$ 平面 ACD'，平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD'=AC$，$AC\perp BC$，$BC\subset$ 平面 ABC，

$\therefore BC\perp$ 平面 ACD'，

满足侧棱 $\perp$ 底面，转化为直棱柱外接球求解，

设 $\Delta ACD'$ 外接圆半径为 r， 可得 $r=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

锥高 $h=BC=\sqrt{2}$，

设球的半径为 R，

由勾股定理可得 $R^2=(\dfrac{1}{2}h)^2+r^2$， 即 $R^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2$， 解得 $R=1$，

$\therefore$ 三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi$．

故答案为： 4π．

16．解：四个小球的球心组成一个棱长为 $2r$ 的正四面体，设它的中心 O 到各面的距离为 d，

组成的正四面体的高为h，且$h=\sqrt{(2r)^2-(\frac{2\sqrt{3}}{3}r)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}r$，

由等体积法可得，$\frac{1}{3}S_{底面}\cdot h=\frac{1}{3}S_{表面}\cdot d=4\times\frac{1}{3}S_{底面}\cdot d$，

$\therefore d=\frac{1}{4}h$，且$d=\frac{\sqrt{6}}{6}r$，

正四面体$D-ABC$的各面分别与上述正四面体的各面平行，距离均为r，

两正四面体有公共中心O，

$\therefore \frac{d}{d+r}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}r}{\frac{\sqrt{6}}{6}r+r}=\frac{1}{\sqrt{6}+1}$，则正四面体$D-ABC$的棱长为$2r\cdot\frac{d+r}{d}=2r\cdot(\sqrt{6}+1)$，

又正四面体$D-ABC$的棱长为a，$\therefore a=2r\cdot(\sqrt{6}+1)$，

得$r=\frac{a}{2(\sqrt{6}+1)}=\frac{\sqrt{6}-1}{10}a$.

故答案为：$\frac{\sqrt{6}-1}{10}a$