数学运算中的初高中衔接问题（二）

目录

CONTENTS

1 绝对值

2 二次方程

3 二次函数

O N E

1

绝 对 值

绝对值的代数意义、几何意义是什么？

1. 代数意义：正数的绝对值是它的本身，负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值仍是零。

即 $|a|=\begin{cases} a, & a>0, \\ 0, & a=0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$ 或 $|a|=\begin{cases} a\ (a\geq 0) \\ -a\ (a\leq 0) \end{cases}$

2. 几何意义：一个数的绝对值，是数轴上表示这个数的点到原点的距离。

两个数的差的绝对值 $|a-b|$ 的几何意义：表示在数轴上，数 a 和数 b 之间的距离。

【思考】

结合绝对值的代数意义、几何意义，思考如何解不等式：$|x-1|>4$?

解法一（分类讨论）：当 $x\geq1$ 时，$|x-1|=x-1>4$，解得 $x>5$

当 $x<1$ 时，$|x-1|=1-x>4$，解得 $x<-3$。综上，$x<-3$ 或 $x>5$。

解法二（几何意义）：数轴上 x 与 1 的距离大于 4，所以范围是 $x<-3$ 或 $x>5$。

解法三（公式法）：$\because|x-1|>4$，$\therefore x-1<-4$ 或 $x-1>4$，所以范围是 $x<-3$ 或 $x>5$。

【归纳总结】

解绝对值不等式的方法：

（1）分类讨论

（2）几何意义

（3）公式法：$|x|\geq a\Leftrightarrow x\geq a$ 或 $x\leq -a$；　　$|x|\leq a\Leftrightarrow -a\leq x\leq a$。

【拓展提升】

如何解不等式：$|x-1|+|x-3|>4$ ？

解法一（分类讨论）：由 $x-1=0$，得 $x=1$；由 $x-3=0$，得 $x=3$；

① 若 $x<1$，不等式可变为 $-(x-1)-(x-3)>4$，解得 $x<0$，又 $x<1$，$\therefore x<0$；

② 若 $1\le x<3$，不等式可变为 $(x-1)-(x-3)>4$，即 $1>4$，$\therefore$不存在满足条件的 x；

③ 若 $x\ge 3$，不等式可变为 $(x-1)+(x-3)>4$，解得 $x>4$，又 $x\ge 3$，$\therefore x>4$；

综上所述，原不等式的解为 $x<0$ 或 $x>4$。

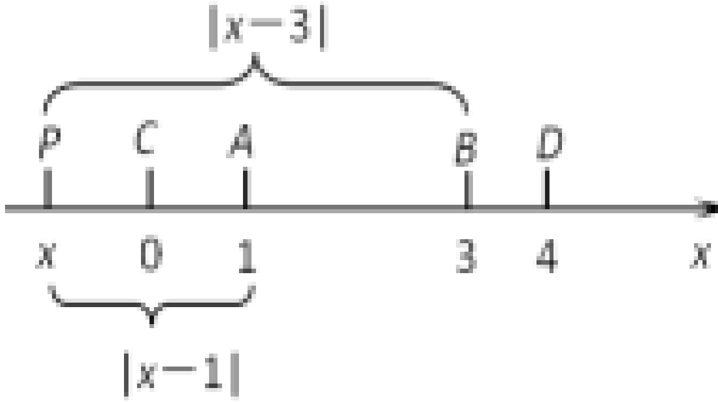
【拓展提升】

如何解不等式：$|x-1|+|x-3|>4$ ？

解法二（几何意义）：如右图，$|x-1|$表示x轴上坐标为 x 的点 P 到坐标为 1 的点 A 之间的距离$|PA|$，即$|PA|=|x-1|$；$|x-3|$表示x轴上点 P 到坐标为 3 的点 B 之间的距离$|PB|$，即$|PB|=|x-3|$。

所以，不等式$|x-1|+|x-3|>4$的几何意义即为$|PA|+|PB|>4$。

由$|AB|=2$，可知点 P 在点 C(坐标为 0)的左侧、或点 P 在点 D(坐标为 4)的右侧。所以原不等式的解为$x<0$或$x>4$。



O N E

2

二 次 方 程

如何判断一元二次方程根的情况？

b^2-4ac 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的根的判别式，通常用符号"Δ"来表示。对于一元二次方程有

（1）当Δ＞0时，方程有两个不相等的实数根 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

（2）当Δ＝0时，方程有两个相等的实数根，$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$；

（3）当Δ＜0时，方程没有实数根。

【练习】判定下列关于 x 的方程的根的情况（其中 a 为常数），如果方程有实数根，写出方程的实数根。

$(1)x^2-3x+3=0$ $(2)x^2-ax-1=0$ $(3)x^2-ax+a-1=0$ $(4)x^2-2x+a=0$

通过完成以上几题，有什么收获？

【归纳总结】

1、第（3）题中，方程可以直接分解因式，因此可以不用判别式。

2、第（3）、（4）小题中，需要对 a 的取值情况进行讨论，这一方法叫做分类讨论。

3、解一元二次方程的方法主要有：配方法，求根公式法，分解因式法（含十字相乘法）

【思考】

若一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$存在两根，结合求根公式，思考方程两根的和与积有何特点。

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$。这一关系也被称为韦达定理。

注：以 a,b 为根的一元二次方程（二次项系数为 1）可以写成：$x^2-(a+b)x+a\cdot b=0$。

【典例】

（1）已知方程$5x^2+kx-6=0$的一个根是2，求它的另一个根及k的值。

（2）已知关于x的方程$x^2+2(m-2)x+m2+4=0$有两个实数根，并且这两个实数根的平方和比两个根的积大21，求m的值。

（3）已知两个数的和为4，积为−12，求这两个数。

【拓展提升】

若关于 x 的一元二次方程 $x^2-x+a-4=0$ 的一根大于零、另一根小于零，求实数 a 的取值范围。

解：设 x_1, x_2 是方程的两根，则 $x_1 \cdot x_2=a-4<0$，且 $\Delta=(-1)2-4(a-4)>0$。

$\therefore$ a 的取值范围是 $a<4$。

使用韦达定理时，不要忘记判别式△！

ONE

3

一元二次函数

一元二次函数$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）有哪些表示形式？

1. 一般式：$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）
2. 顶点式：$y=a(x+h)^2+k$,$(a\neq0)$,其中顶点坐标是(−h，k)

3. 交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$,$(a\neq0)$,其中x_1,x_2是二次函数图象与x轴交点的横坐标。

【练习】

（1）已知某二次函数的最大值为 2，图像的顶点在直线 $y=x+1$ 上，并且图象经过点（3，－1），求二次函数的解析式。

（2）已知二次函数的图像过点(－1，－22)，(0，－8)，(2，8)，求此二次函数的表达式。

（3）已知二次函数的图像过点(－3，0)，(1，0)，且顶点到 x 轴的距离等于 2，求此二次函数的表达式。

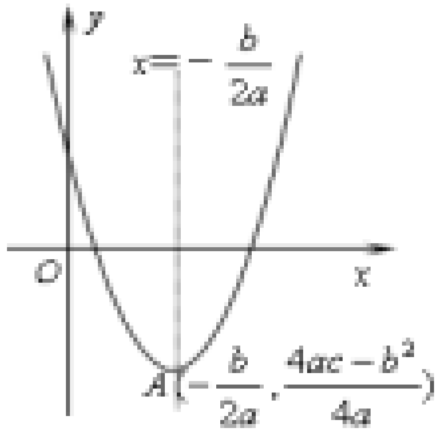
【反思】

如何合理选择二次函数的表达形?

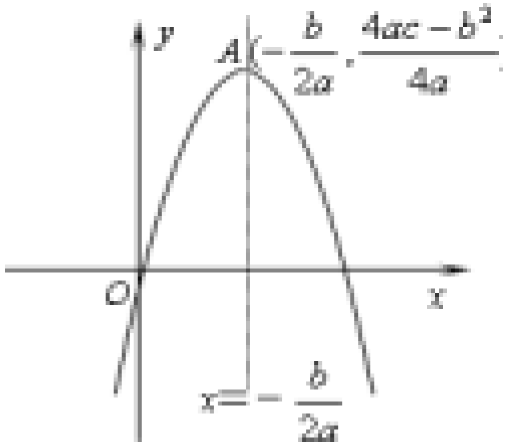
【思考】不同表达式下，如何画一元二次函数的简图？

（1）一般式：$y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）条件下：

①当 a>0 时，函数图象开口向上，顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减小，当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取最小值 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$；



②当 a<0 时，函数图象开口向下，顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}$，当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而增大，当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随着 x 的增大而减小，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，函数取最大值 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$。



【思考】不同表达式下，如何画一元二次函数的简图？

（2）顶点式：$y=a(x+h)^2+k,(a\neq 0)$,条件下：

a决定了二次函数图象的开口大小及方向，它是由二次函数y＝ax²的图象平移得到的，h决定了函数图象的左右平移，而且“h正左移，h负右移”；k决定了函数图象的上下平移，而且“k正上移，k负下移”，平移后顶点为(－h，k)。

（3）交点式：$y=a(x-x_1)(x-x_2),(a\neq 0)$ 条件下：

a决定了二次函数图象的开口大小及方向，与与x轴交点的坐标为$(x_1,0),(x_2,0)$。

【练习】

例 1：求二次函数 $y=-3x^2-6x+1$ 图象的开口方向、对称轴、顶点坐标、最大值（或最小值），并指出当 x 取何值时，y 随 x 的增大而增大（或减小）？并画出该函数的图象。

例 2：把二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图像向上平移 2 个单位，再向左平移 4 个单位，得到函数 $y=x^2$ 的图像，求 b，c 的值。

【课堂小结】

这节课我们学习了哪些内容？

【课堂检测】

1、 若 x_1 和 x_2 分别是一元二次方程 $2x^2+5x-3=0$ 的两根。

（1）求 $|x_1-x_2|$ 的值；　　（2）求 $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$ 的值；　　（3）$x_1^3+x_2^3$。

2、某种产品的成本是 120 元/件，试销阶段每件产品的售价 x（元）与产品的日销售量 y（件）之间关系如下表所示。

x /元	130	150	165
y/件	70	50	35

若日销售量 y 是销售价 x 的一次函数，那么，要使每天所获得最大的利润，每件产品的销售价应定为多少元？此时每天的销售利润是多少？

【拓展提升】

已知函数 $y=x^2$，$-2\leqslant x\leqslant a$，其中 $a\geqslant -2$，求该函数的最大值与最小值，并求出函数取最大值和最小值时所对应的自变量 x 的值。

THANKS