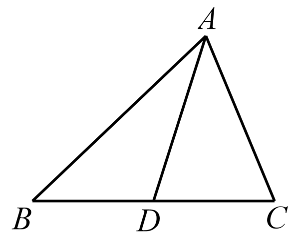
神奇的极化恒等式

公式推导

$$\left.\begin{aligned}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2\\\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{4}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right]$$

在△ ABC 中，D 是边 BC 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{DB}\right|^2$.



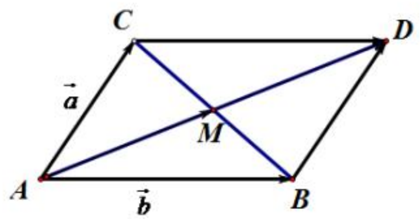
如图，由

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right]^2-\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\right]^2=\overrightarrow{AD}^2-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)^2=\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left|\overrightarrow{DB}\right|^2 \text{得证.}$$

类比初中的“完全平方和”与“完全平方差公式”。

几何意义

向量的数量积可以表示为以这组向量为邻边的平行四边形的“和对角线”与“差对角线”平方差的 $\frac{1}{4}$ 。



他的作用

极化恒等式的作用主要在于，它可以将两个向量的数量积转化为这两个向量的“和向量”与“差向量”，因此，当两个向量的“和向量”或“差向量”为定向量时，常常可以考虑利用极化恒等式进行转化.

常见的解决的题型

有中点或能构造中点的积的向量题。

与课本的渊源

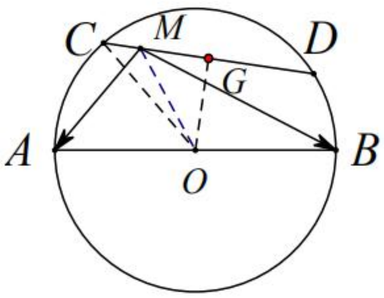
（1）必修四课本上有：在ΔABC中，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right),BD=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$是课本上出现的2个重要的向量三角关系，而极化恒等式无非是这两个公式的逆用，说明极化恒等式源与教材；

（2）向量是连接代数与几何的桥梁，由于向量的坐标运算引入，向量与代数的互换已经深入人心，而与几何的运算练习略显单薄，而极化恒等式恰恰弥补了这个缺憾，可以说极化恒等式是把向量的数量积问题用形象的几何图形展示的淋漓尽致。

【例1】已知AB为圆O的直径，M为圆O的弦CD上一动点，$AB=8$，$CD=6$，则$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$的取值范围是___▲___.

【答案】$\left[-9,0\right]$

【解析】

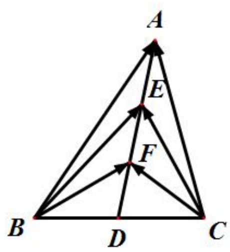


如图

$$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2=\overrightarrow{MO}^2-16$$

$$\because\left|\overrightarrow{OC}\right|\le\left|\overrightarrow{OM}\right|\le\left|\overrightarrow{OG}\right|\Rightarrow\sqrt{7}\le\left|\overrightarrow{OM}\right|\le 4\Rightarrow\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}\in\left[-9,0\right]$$

【例2】(2016江苏，13)如图，在△ABC中，D是BC的中点，E，F是AD上的两个三等分点，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值是________.



【答案】$\frac{7}{8}$

【解析】解法一：基底法

令$\overrightarrow{DF}=\vec{a},\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{DC}=-\vec{b},\overrightarrow{DE}=2\vec{a},\overrightarrow{DA}=3\vec{a}$，则$\overrightarrow{BA}=3\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{CA}=3\vec{a}+\vec{b},$

$\overrightarrow{BE}=2\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{CE}=2\vec{a}+\vec{b},\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b},\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\vec{b}$，

则$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CA}=9\vec{a}^2-\vec{b}^2,\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\vec{a}^2-\vec{b}^2,\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^2-\vec{b}^2$

由 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$ 可得 $9\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}=4,\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}=-1$，因此 $\vec{a}^{2}=\dfrac{5}{8},\vec{b}^{2}=\dfrac{13}{8}$，

因此 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^{2}-\vec{b}^{2}=\dfrac{4\times5}{8}-\dfrac{13}{8}=\dfrac{7}{8}$.

解法二：极化恒等式

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}^{2}-\overrightarrow{BD}^{2}=4$$

$$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FB}\cdot\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{FD}^{2}-\overrightarrow{BD}^{2}=\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^{2}-\overrightarrow{BD}^{2}=-1$$

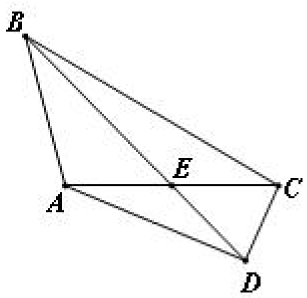
解得：$\overrightarrow{AD}^{2}=\dfrac{45}{8},\overrightarrow{BD}^{2}=\dfrac{13}{8}$

所以 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}^{2}-\overrightarrow{BD}^{2}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AD}^{2}-\overrightarrow{BD}^{2}=\dfrac{7}{8}$.

【例3】（盐城市2017届高三上学期期中17）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$，$E$ 为 AC 的中点.

（1）若 $\cos\angle ABC=\dfrac{12}{13}$，求 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}$；

（2）若 $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{ED}$，求 $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$ 的值.



第 题图

【解析】解：（1）$\because\cos\angle ABC=\dfrac{12}{13}$，$\angle ABC\in\left(0,\pi\right)$，

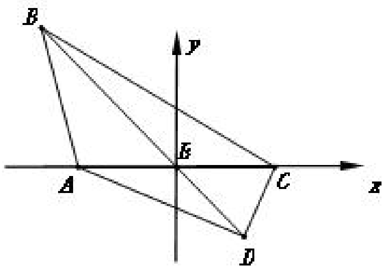
$\therefore\sin\angle ABC=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^{2}}=\dfrac{5}{13}$ ，

$\because\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12=BA\cdot BC\cos\angle ABC=\dfrac{12}{13}BA\cdot BC,$

$\therefore BA\cdot BC=13,$

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times13\times\dfrac{5}{13}=\dfrac{5}{2}$.

（2）以E为原点，AC所在直线为x轴，建立如图所示平面直角坐标系，



第17题图

则$A(-2,0)$，$C(2,0)$，设$D(x,y)$，由$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{ED}$，可得$B(-2x,-2y)$，

则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12=(2x-2,2y)\cdot(2x+2,2y)=4x^2-4+4y^2$,

$\therefore x^2+y^2=4$,

$\therefore \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=(-2-x,-y)\cdot(2-x,-y)=x^2+y^2-4=0$.

【极化恒等式的解法】第二问

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2-\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{BE}\right)^2-\left(\overrightarrow{CA}\right)^2\right]=\overrightarrow{BE}^2-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}\right)^2=\overrightarrow{BE}^2-4=12$

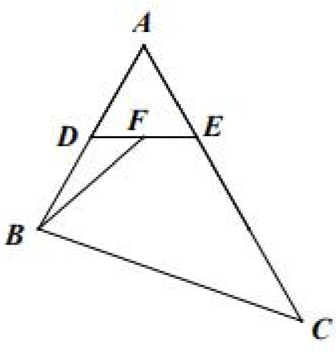
$\Rightarrow\left|\overrightarrow{BE}\right|=4$

$\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{ED}\Rightarrow ED=2$

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}\right)^2-\left(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{DE}\right)^2-\overrightarrow{AC}^2\right]=0$

，

【例4】如图，在ΔABC中，已知$AB=4,AC=6,\angle BAC=60°$，点D,E分别在边AB,AC上，且$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AE}$，若$F$为$DE$的中点，则$\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{DE}$的值为________.

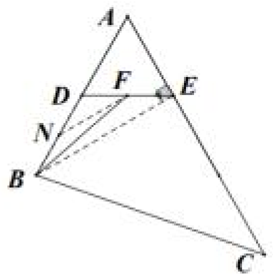


【解析】

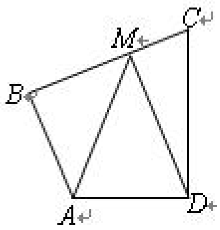
取BD的中点N，连接NF,EB，则$BE\perp AE\Rightarrow BE=2\sqrt{3}$，

在ΔDEB中，$FN//\frac{1}{2}EB\Rightarrow FN=\sqrt{3}$

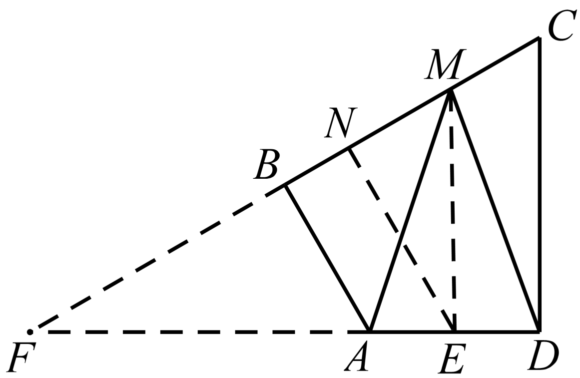
，$\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{FB}\bullet\overrightarrow{FD}=2\left(\overrightarrow{FN}^{2}-\frac{1}{4}\overrightarrow{DB}^{2}\right)=2\left(\overrightarrow{FN}^{2}-1\right)\Rightarrow\overrightarrow{BF}\bullet\overrightarrow{DE}=4$



【例 5】（2019 苏州）如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AD\perp CD$，$\angle BCD=60°$，$CB=CD=2\sqrt{3}$．若点 M 为边 BC 上的动点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的最小值为___▲___．



用极化不等式的解法如下：



设 E 是 AD 的中点，作 $EN\perp BC$ 于 N，延长 CB 交 DA 的延长线于 F，

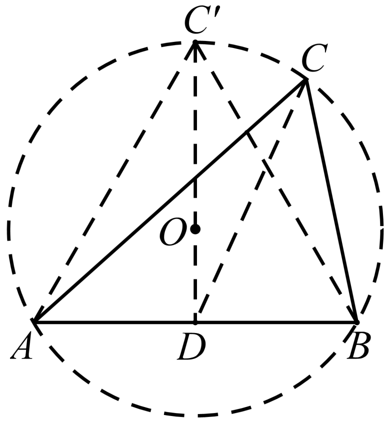
由题意可得：$FD=\sqrt{3}CD=6, FC=2CD=4\sqrt{3}\Rightarrow BF=2\sqrt{3}\Rightarrow AB=2, FA=4$

$\Rightarrow AD=2\Rightarrow\frac{EN}{AB}=\frac{EF}{FA}=\frac{5}{4}\Rightarrow EN=\frac{5}{2}$.

则 $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MD}=\left|\overrightarrow{ME}\right|^{2}-\left|\overrightarrow{EA}\right|^{2}=\left|\overrightarrow{ME}\right|^{2}-1\geq EN^{2}-1=\left(\frac{5}{2}\right)^{2}-1=\frac{21}{4}$，

所以 $\left(\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{DM}\right)_{\min}=\dfrac{21}{4}$.

【例 6】(2017 南京、盐城一模)在△ABC 中，已知 $AB=\sqrt{3}$，$C=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}$ 的最大值为__________.



解析：设 D 是 AB 的中点，连接 CD，点 O 是△ABC 的外心，连接 DO 并延长交圆 O 于 C'，

由△ABC' 是等边三角形，$AD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow C'D=\dfrac{3}{2}$，

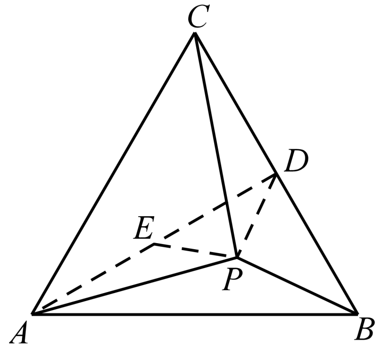
则 $\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-\left|\overrightarrow{DA}\right|^2=\left|\overrightarrow{CD}\right|^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\le\left|\overrightarrow{C'D}\right|^2-\dfrac{3}{4}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{2}$

所以 $\left(\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}\right)_{\max}=\dfrac{3}{2}$.

【例 7】(2017 全国 III 卷理科，12 题)

已知△ABC 是边长为 2 的等边三角形，P 为平面 ABC 内一点，则 $\overrightarrow{PA}\bullet\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$ 的最小值是(　　)

$A.-2$　　　　$B.-\dfrac{3}{2}$　　　　$C.-\dfrac{4}{3}$　　　　$D.-1$



解析：取BC的中点D，连接AD，PD，取AD的中点E，连接PE，

由$\triangle ABC$是边长为2的等边三角形，E为中线AD的中点$\Rightarrow AE=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

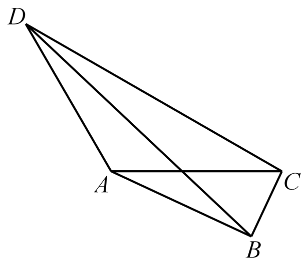
则

$$\overrightarrow{PA}\bullet\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)=\overrightarrow{PA}\bullet 2\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{PA}\bullet\overrightarrow{PD}=2\left(\left|\overrightarrow{PE}\right|^2-\left|\overrightarrow{EA}\right|^2\right)=2\left[\left|\overrightarrow{PE}\right|^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]\geq 2\times\left(0-\frac{3}{4}\right)=-\frac{3}{2}$$

，

所以 $\left[\overrightarrow{PA}\bullet\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)\right]_{\min}=-\frac{3}{2}$.

【例 8】如图，在平面四边形$ABCD$中，$AC=AD=2$，$\angle DAC=120^\circ$，$\angle ABC=90^\circ$，则$\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{BC}$的最大值为__________.



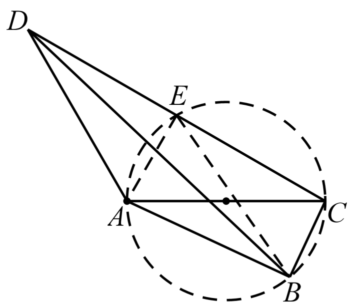
解析：取CD的中点E，连接EA，EB，

由$AC=AD=2$，$\angle DAC=120^\circ\Rightarrow AE\perp CD, DE=AD\sin 60^\circ=\sqrt{3}$，

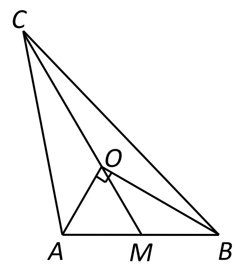
由$\angle ABC=\angle AEC=90^\circ\Rightarrow A,B,C,E$四点共圆，且直径为$AC$.

则 $\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BE}\right|^2-\left|\overrightarrow{ED}\right|^2=\left|\overrightarrow{BE}\right|^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\leq AC^2-3=2^2-3=1$

所以 $\left(\overrightarrow{BD}\bullet\overrightarrow{BC}\right)_{\max}=1$.



【例 9】(2016 南通密卷 11) 如图，已知点 O 为$\triangle ABC$的重心，$OA\perp OB, AB=6$，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$的值为________.



(第 11 题图)

【解析】法 1：连结 CO 并延长交 AB 于点 M(如图 1)，

则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right)$

$$=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}^2$$

$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}^2$$

$$=\overrightarrow{OC}\cdot\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{OC}^2,$$

因为 $OC=2OM=AB=6$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=72$．

法 2： 以 AB 的中点 M 为坐标原点，AB 为 x 轴建立平面直角坐标系(如图 2)，

则 $A(-3,0)$， $B(3,0)$，

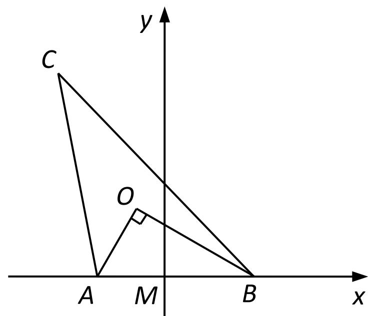
设 $C(x,y)$，则易得 $O\left(\frac{x}{3},\frac{y}{3}\right)$，

因为 $OA\perp OB$，所以 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}=0$，

从而 $\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-3\right)+\left(\frac{y}{3}\right)^2=0$，

化简得，$x^2+y^2=81$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=(x+3)(x-3)+y^2=x^2+y^2-9=72$．

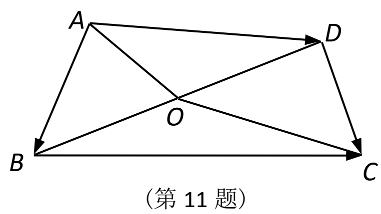


(图 2)

法 3：极化恒等式

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\right)^2-\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{AM}\right)^2-\overrightarrow{AB}^2\right]=\frac{1}{4}\left[18^2-6^2\right]=72.$$

【例 10】2017 南通二模如图，在平面四边形 $ABCD$ 中，O 为 BD 的中点，且 $OA=3$，$OC=5$．若 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=-7$，　　则 $\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{DC}$ 的值是________．



(第 11 题)

【答案】9

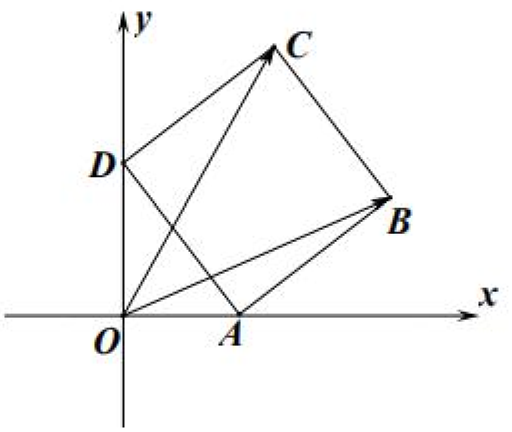
【解析】

$$\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}=-7=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)^2-\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{AO}\right)^2-\overrightarrow{DB}^2\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(2\times 3\right)^2-\overrightarrow{DB}^2\right]=-7\Rightarrow\overrightarrow{DB}^2=64$$

$$\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{DC}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}\right)^2-\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{OC}\right)^2-\overrightarrow{BD}^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\times 5\right)^2-64\right]=9$$

【例 11】如图放置的边长为 1 的正方形 $ABCD$，顶点 A,D 分别在 x 轴，y 轴正半轴（含原点）滑动，则 $\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}$ 的最大值为____________.



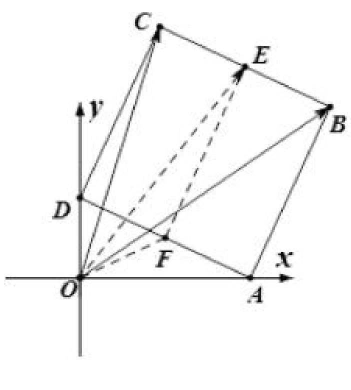
【解析】如图，BC,AD 中点 E,F，

$$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}=\frac{1}{4}\left[\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2-\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)^2\right]=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{OE}\right)^2-\overrightarrow{BC}^2\right]=\overrightarrow{OE}^2-\frac{1}{4}$$

因为

$$OE<OF+EF=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OC}\le\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$$



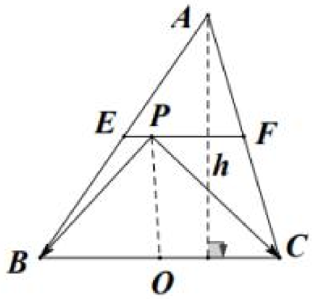
【例 12】（2012 南京模拟）在ΔABC中，点E,F分别是线段AB,AC的中点，点P在直线EF上，若ΔABC的面积为 2，则$\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2$的最小值是____________.

【解析】取BC中点

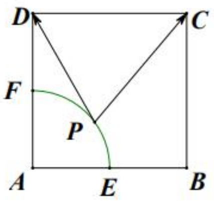
$O,\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PO}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2\Rightarrow\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PO}^2+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2\geq 2\sqrt{\overrightarrow{PO}^2\bullet\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}^2}=\sqrt{3}\left|\overrightarrow{PO}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\because PO\geq\frac{1}{2}h\Rightarrow\sqrt{3}\left|\overrightarrow{PO}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\geq\frac{\sqrt{3}}{2}h\bullet\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{3}S_{\Delta ABC}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{PB}\bullet\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BC}^2\right)_{\min}=2\sqrt{3}$



【例 13】(2015 南通三调)如图，已知正方形$ABCD$的边长为 2，E为AB的中点，以A为圆心，AE为半径，作圆交AD于点F，若P为劣弧EF上的动点，则$\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{PD}$的最小值是____________.



【解析】$\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PG}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{PG}^2-1$

当A,P,G三点共线时PG最小，此时

$P'G=AG-AP'=\sqrt{5}-1\Rightarrow\left(\overrightarrow{PC}\bullet\overrightarrow{PD}\right)_{\min}=5-2\sqrt{5}$