

2020年高中数学建模（应用）能力展示活动测试题

答卷要求

1. 全卷共六个题，其中三个填空题，三个解答题。在卷头写明个人信息。
2. 按试题号所在位置将相应题的解答书写在答题纸上，不用抄题。
3. 考试形式为闭卷，时长150分钟，可以使用计算器，不能使用手机。

一、（满分5分）中国汽车市场分为个人用车和商用车。根据中国汽车协会数据，2020年4月份汽车销量同比增长4.4%，增长主要归功于商用车。4月份商用车销量增长近三分之一，个人用车销量下降2.6%。基于这个消息，在2019年同期中国汽车市场个人用车占比约为_____。

【注】在统计学中，经常谈环比和同比，将本期数据与上期比较（例如2014年7月份与2014年6月份相比较）叫环比，环比增长率= $\frac{\text{本期数}-\text{上期数}}{\text{上期数}} \times 100\%$ ；一般来说，将本期数据与上一年

同期比较（例如2014年7月份与2013年7月份比较）叫同比，同比增长率= $\frac{\text{本期数}-\text{同期数}}{\text{同期数}} \times 100\%$ 。

二、（满分6分）据新浪新闻消息，2020年10月27日，河南某地小区一位业主在小区的电梯间张贴了一张引人注目的告示：各位业主，大家好！本人前几天门没有关好，扫地机器人自己跑出来找不到了，望有捡到者与我联系，不胜感激。据这位业主介绍，当时给机器人设定的是早上扫地，可能是因为忘记关门了，机器人扫着扫着就跑出门去了，自己两天后才发现。

机器人真的会走失吗？现在一个扫地机器人在打开房门的矩形房间中工作，房门到与其垂直的墙面之间有一定的距离，而且房门口没有门槛等障碍物。

(1) 较为先进的机器人可以从所在位置处出发，等可能的随机从相互垂直的两个方向选择一条路径，以平行于某一墙面的弓字形路线来回对全屋进行清扫，直至完成；对有障碍物的情况，机器人会识别障碍，在碰撞之前转向，如图1所示。这种较为先进的机器人从打开的家门“离家出走”的概率是_____。

(2) 早期的扫地机器人装有避震的橡胶材料，在室内随机运动，当撞击到障碍物时就随机转向，如图2所示，直至清扫完毕。这种早期的扫地机器人从打开的房门“离家出走”的概率是_____。

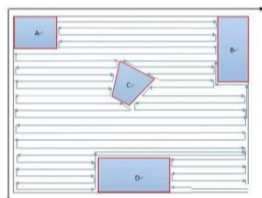


图1

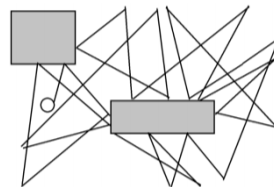


图2

三、（满分14分）司机上路最烦心的是堵车，而一旦车辆过多，超过饱和交通流量，就会大大阻碍车辆通行。专家认定，在通常环境下，饱和交通流量 Q 是车道宽度 W 的函数，即 $Q=f(W)$ 。在这个函数关系下有如下对应数据

| W (米) | 3.0 | 3.3 | 3.6 | 3.9 | 4.2 | 4.5 | 4.8 | 5.1 |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Q (辆/小时) | 1791 | 1868 | 1980 | 2127 | 2310 | 2528 | 2781 | 3069 |

- (1) 符合上述规律的 $f(W)$ 的表达式为_____。
- (2) 解决这个问题的主要步骤（用文字表达）是_____。

四、（满分25分）一年夏天，北京中关村科学院小区门口有个西瓜摊，摊主是魏姓大兴人，他卖瓜不称重，大瓜小瓜分着卖，大瓜的个头基本相当，每个15元；小瓜的个头也很均匀，每个5元。

这天住在小区里的王教授和王太太夫妇来买西瓜，王太太看到很多人都在买小瓜，就凑了过去，却听见王教授说：“不买小的，买大的。”

“大瓜的半径比小瓜的半径大不了一倍，可大的价格却是小的3倍呢……”王太太犹豫道。

王教授笑笑说：“瓜的大小要算体积，不是面积。那小瓜的半径大概是大瓜的 $\frac{2}{3}$ ，小瓜的体积

不到大的 30%，大小瓜的皮厚差不多，当然买大的划算。”

王太太疑惑地抱起了大个的西瓜，老魏看得目瞪口呆。

(1) 你是否支持王教授的判断？请说明理由。

(2) 请你替摊主老魏出个主意。同品种的大小瓜的半径比是 3:2，大瓜如果卖 15 块钱一个，小瓜大概卖多少钱一个才能使得买大瓜小瓜都一样。

(提示：球的体积公式为 $V_{球} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，球的表面积公式为 $S_{球} = 4\pi r^2$ ，其中 r 是球半径)

五、(满分 25 分) 2020 年 11 月 11 日，国家统计局公布了 10 月份居民消费价格指数 (CPI)，报道称，2020 年 10 月份，全国居民生活消费品价格水平同比上涨 0.5%。12 月 15 日，国务院新闻办公室举行新闻发布会，国家统计局新闻发言人介绍说：随着经济复苏，居民消费价格指数 (CPI) 从年初“破 5”一路涨幅下降，甚至在 11 月出现了近 11 年来 CPI 首次下降情况。

居民消费价格指数 (Consumer Price Index, 简称 CPI) 是度量居民生活消费品价格水平随着时间变动的相对数，综合反映居民购买的生活消费品价格水平的变动情况。CPI 的计算公式是

$$CPI = \frac{\text{当期居民生活消费品价格水平}}{\text{基期居民生活消费品价格水平}} \times 100$$

居民生活消费品价格水平简称为价格水平，它是一组固定商品价格的加权平均值。这里的“基期”是指某一个月 (也可以是年)，“当期”是指当下的月 (或年)，也可以表为基期之后的第 k 月 (或第 k 年)。CPI 实际上是一个对比性的结果，即用当期的价格水平除以基期的价格水平再乘以 100 得到的数值。CPI 的计算公式可变形为

$$\frac{\text{第 } k \text{ 月 CPI}}{100} = \frac{\text{第 } k \text{ 月价格水平}}{\text{基期价格水平}} \quad (*)$$

表 1 是国家统计局公布的部分经济数据。其中第二、三行为 2019 年和 2020 年每个月的 CPI 数据，是以上一年同月为基期进行对比性计算得到的。比如 2020 年 11 月的 CPI 就是以 2019 年 11 月为基期计算得到的。另外

$$\text{同比增长率} = \frac{\text{本月价格水平} - \text{去年同月价格水平}}{\text{去年同月价格水平}}, \quad \text{环比增长率} = \frac{\text{本月价格水平} - \text{上月价格水平}}{\text{上月价格水平}}$$

表 1 国家统计局公布的部分经济数据

| 月 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2019 年各月的 CPI | 101.7 | 101.5 | 102.3 | 102.5 | 102.7 | 102.7 | 102.8 | 102.8 | 103.0 | 103.8 | 104.5 | 104.5 |
| 2020 年各月的 CPI | 105.4 | 105.2 | 104.3 | 103.3 | 102.4 | 102.5 | 102.7 | 102.4 | 101.7 | 100.5 | 99.5 | |
| 2020 年各月价格水平同比增长率 | | | | | | | | | | 0.5% | | |
| 2020 年各月价格水平环比增长率 | 1.4% | 0.8% | -1.2% | -0.9% | -0.8% | -0.1% | 0.6% | 0.4% | 0.2% | -0.3% | -0.6% | |

(1) 请你根据表 1，解释“2020 年 10 月份，全国居民生活消费品价格水平同比上涨 0.5%”中的“0.5%”是如何得出的？它是什么含义？并将 2020 年 1 月到 11 月的同比增长率用表列出；

(2) 请你解释“居民消费价格指数 (CPI) 从年初‘破 5’一路涨幅下降”中的“破 5”是什么意思？“在 11 月出现了近 11 年来 CPI 首次下降情况”中的“下降”是什么意思？

(3) 以 2020 年 1 月为对比基期，利用表 1 中的相关数据计算 2020 年 11 月的全国居民消费价格指数 (CPI)。

六、(满分 25 分) S 大学附中新建了学校食堂，每天三个年级有近 1200 人在学校食堂同时用午餐，午餐开放时间约 40 分钟，食堂制作了三类餐食，第一类是选餐，学生凭喜好在做好的大约 6 种菜和几种主食中任意选购；第二类是套餐，有炒饼、面条、盖饭三种，套餐性价比高，已盛装好，可直接取餐；第三类是西餐，西餐有特色。售饭窗口一共有 16 个，其中 10 个选餐窗口，4 个套餐窗口，2 个西餐窗口。试运行后，发现选餐窗口排队等候的人较多，有些学生受时间影响不得以去套餐和西餐窗口购餐。为了更合理地设置窗口布局，增加学生的用餐满意度，学生会准备在用餐的学生中选出一些人进行问卷调查并设计出优化售饭窗口的方案。

(1) 请你设计一下问卷调查的发放方案，并确定影响设定售饭窗口的相关因素；

(2) 请你给出关于设计优化售饭窗口的数学表达式，并给出求解思路。