第八章　立体几何初步

培优课　与球有关的内切、外接问题

与球有关的内切、外接问题是立体几何的一个重点(切、接问题的解题思路类似，此处以多面体的外接球为例).研究多面体的外接球问题，既要运用多面体的知识，又要运用球的知识，并且还要特别注意多面体的有关几何元素与球的半径之间的关系.

内容索引

一

直接法

例1 一个六棱柱的底面是正六边形，其侧棱垂直于底面，已知该六棱柱的顶点都在同一个球面上，且该六棱柱的体积为$\frac{9}{8}$，底面周长为3，则这个球的体积为$\underline{\frac{4\pi}{3}}$.

解析

设正六棱柱的底面边长为x，高为h，

则有$\begin{cases}6x=3,\\ \frac{9}{8}=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2h,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ h=\sqrt{3}.\end{cases}$

∴正六棱柱的底面外接圆的半径 $r=\frac{1}{2}$，

球心到底面的距离 $d=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∴外接球的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=1$.∴$V_{球}=\frac{4\pi}{3}$.

反思感悟

本题运用公式$R^2 = r^2 + d^2$，求球的半径，该公式是求球的半径的常用公式.

跟踪训练1 一个正方体的棱长为a，则该正方体的外接球半径为$\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}a}$，内切球半径为$\underline{\dfrac{a}{2}}$.

解析

设该正方体的外接球半径为R，内切球半径为r，

正方体的体对角线长即为外接球直径，棱长即为内切球的直径，

即 $2R=\sqrt{3}a,2r=a$，

$\therefore R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$r=\dfrac{a}{2}$.

返回

二

构造法

例2 三棱锥$A-BCD$的四个面都是直角三角形，且侧棱AB垂直于底面BCD，$BC\perp CD$，$AB=BC=2$，且$V_{A-BCD}=\frac{4}{3}$，则该三棱锥$A-BCD$外接球的体积为__$4\sqrt{3}\pi$__.

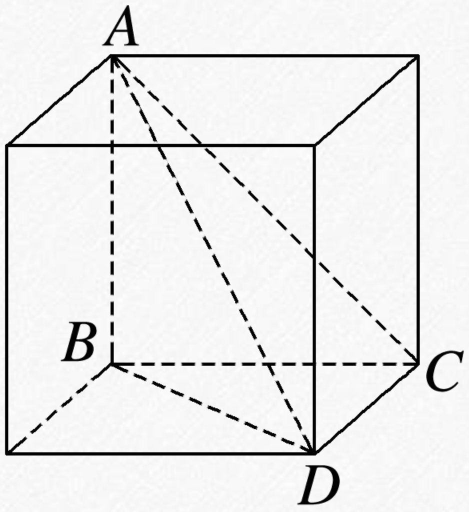
解析

因为$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，

构造如图所示的长方体，

则AD为三棱锥$A-BCD$的外接球的直径.

设外接球的半径为R.



$\because V_{A-BCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times BC\times CD\times AB$

$=\dfrac{1}{6}\times 2\times CD\times 2=\dfrac{4}{3}$,

$\therefore CD=2$，$\therefore$该长方体为正方体，

$\therefore AD=2\sqrt{3}$，$\therefore R=\sqrt{3}$，外接球体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$.

反思感悟

一般地，若一个三棱锥的三条侧棱两两垂直，且其长度分别为a，b，c，则就可以将这个三棱锥补成一个长方体，于是长方体的体对角线的长就是该三棱锥的外接球的直径.设其外接球的半径为R，则有$2R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

跟踪训练2 若三棱锥的三条侧棱两两垂直，且三条侧棱长分别为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，则其外接球的表面积是$\underline{\quad 6\pi \quad}$.

解析

根据题意可知，该三棱锥的三条侧棱两两垂直，

$\therefore$把这个三棱锥可以补成一个同一顶点处三条棱长分别为 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$的长方体，

于是长方体的外接球就是该三棱锥的外接球.

设其外接球的半径为R，

则有$(2R)^2=1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=6$.

$\therefore R^2=\frac{3}{2}$.

故其外接球的表面积$S=4\pi R^2=6\pi$.

返回

三

寻求轴截面圆半径法

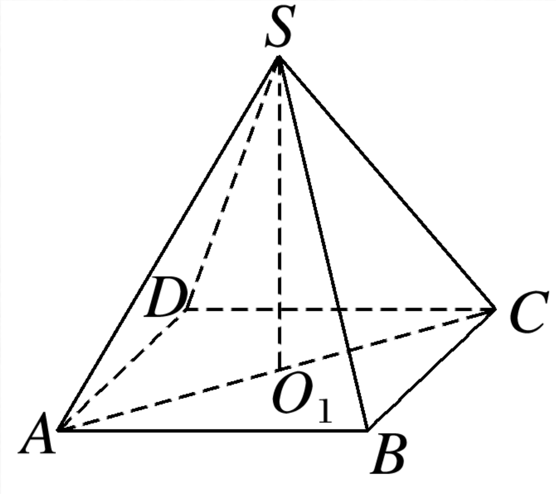
例3 正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长和各侧棱长都为$\sqrt{2}$，点 S，A，B，C，D ，则此球的体积为__$\frac{4\pi}{3}$__.

解析

如图，设正四棱锥的底面中心为O_1，

$\therefore SO_1$垂直于底面$ABCD$，令外接球球心为O，

$\therefore \triangle ASC$的外接圆就是外接球的一个轴截面圆，外接圆的半径就是外接球的半径.



在$\triangle ASC$ 中，由 $SA=SC=\sqrt{2}$，$AC=2$，

得$SA^2+SC^2=AC^2$.

$\therefore \triangle ASC$是以AC为斜边的直角三角形.

$\therefore \dfrac{AC}{2}=1$ 是外接圆的半径，也是外接球的半径.故 $V_{球}=\dfrac{4\pi}{3}$.

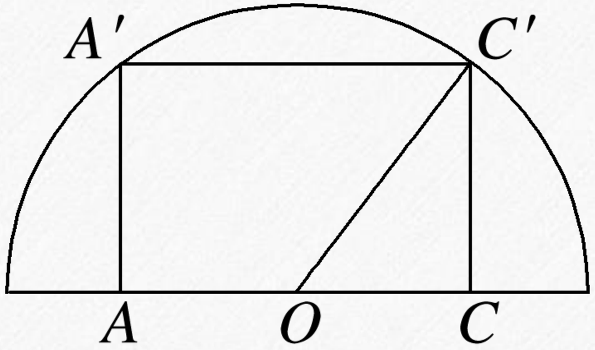
反思感悟

根据题意，我们可以选择最佳角度找出含有正棱锥特征元素的外接球的一个轴截面圆，于是该圆的半径就是所求的外接球的半径.这种思路是探求正棱锥外接球半径的通解通法，该方法的实质就是通过寻找外接球的一个轴截面圆，从而把立体几何问题转化为平面几何问题来研究.这种等价转化的数学思想方法值得我们学习.

跟踪训练3 在半球内有一个内接正方体，试求这个半球的体积与正方体的体积之比.

解

作正方体对角面的截面，如图所示，设半球的半径为R，正方体的棱长为a，



那么 $CC'=a$，$OC=\dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

在Rt△$C'CO$中，由勾股定理，得$CC'^2+OC^2=OC'^2$，

即 $a^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2=R^2$，$\therefore R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

从而 $V_{\text{半球}}=\dfrac{2}{3}\pi R^3=\dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)^3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3$，$V_{\text{正方体}}=a^3$.

因此 $V_{\text{半球}}:V_{\text{正方体}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\pi a^3:a^3=\sqrt{6}\pi:2$.

返回

四

确定球心位置法

例4 已知三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱长为 $2\sqrt{5}$，底面是边长为 $2\sqrt{3}$的等边三角形，则该三棱锥外接球的体积为$\underline{\quad\dfrac{125\pi}{6}\quad}$.

解析

如图所示，该三棱锥为正三棱锥，O为底面$\triangle BCD$的中心且AO垂直于底面BCD，O'在线段AO上，O'为外接球球心，

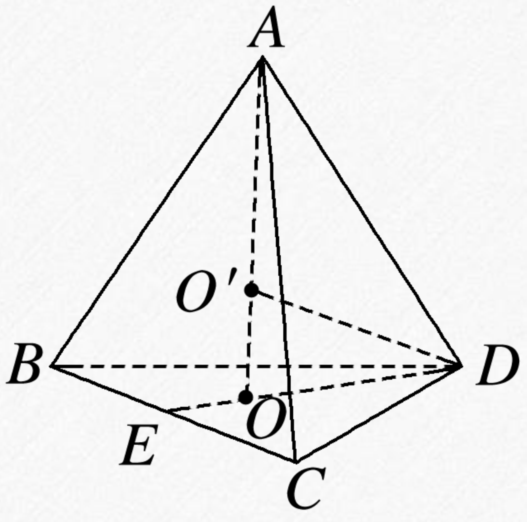
令 $O'A=O'D=R$，$OD=\frac{2}{3}DE=\frac{2}{3}\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2$，$AD=2\sqrt{5}$，

$\therefore AO=\sqrt{AD^2-OD^2}=4$，$\therefore OO'=4-R$，

又$OO'^2+OD^2=O'D^2$，

$\therefore(4-R)^2+4=R^2$，解得 $R=\frac{5}{2}$，

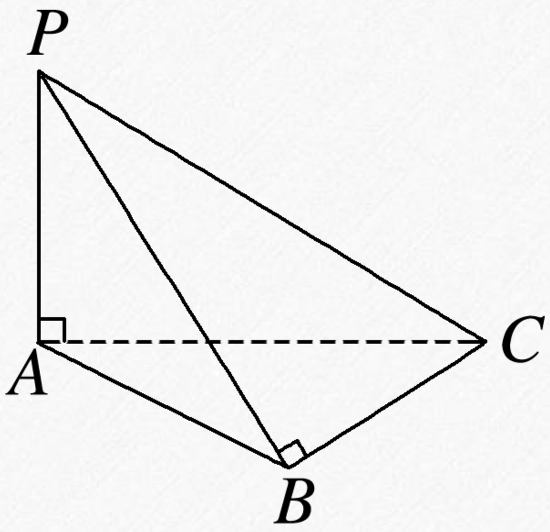
$\therefore V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{125\pi}{6}$.



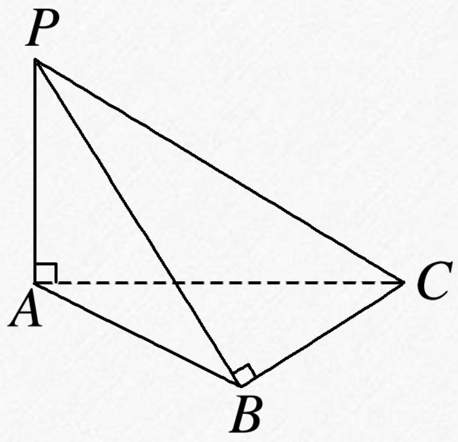
反思感悟

找几何体的外接球球心，即找点O，使点O与几何体各顶点的距离相等.正棱锥的外接球球心在垂线上，直棱柱的外接球球心为上、下底面外心所连线段的中点.

跟踪训练4 如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp AC$，$PB\perp BC$，$PA=2$，$AC=2\sqrt{3}$，则该三棱锥的外接球的表面积为___16π___.



解析



取PC的中点O(图略)，

$\because \triangle PAC$为直角三角形且$\angle PAC = 90°$，

$\therefore OA=\frac{1}{2}PC$，同理 $OB=\frac{1}{2}PC$，

即$OA = OB = OP = OC$，即点O到点P，A，B，C四点的距离相等，

$\therefore O$为外接球的球心，

$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=4$，$\therefore R=\frac{1}{2}PC=2$，

$\therefore S_{球} = 4\pi R^2 = 16\pi$.

返回

课时对点练

1.底面半径为$\sqrt{3}$，母线长为 2 的圆锥的外接球 O 的表面积为

A.6π　　B.12π　　C.8π　　D.16π

解析

由圆锥的底面半径为$\sqrt{3}$，母线长为 2，

可求得其轴截面的顶角为$\frac{2\pi}{3}$.

设该圆锥的底面圆心为O_1，其半径为r，球O的半径为R，

则 $O_1O=|R-1|$，$R^2=O_1O^2+r^2=(R-1)^2+(\sqrt{3})^2$，解得 $R=2$，

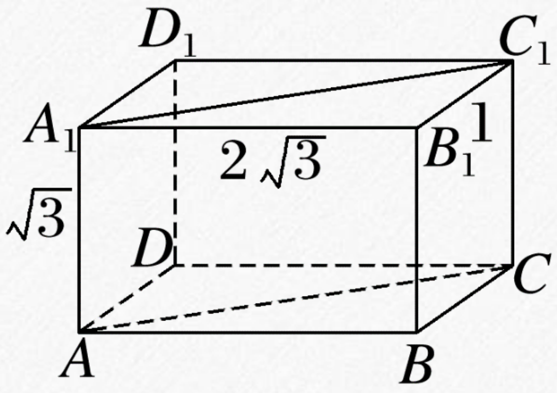
所以球O的表面积为$4\pi R^2=16\pi$.

2.已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为直角三角形，且两直角边长分别为 1 和 $2\sqrt{3}$，此三棱柱的高为$\sqrt{3}$，则该三棱柱的外接球的体积为

A. $\dfrac{8\pi}{3}$　　B. $\dfrac{16\pi}{3}$　　C. $\dfrac{32\pi}{3}$　　D. $\dfrac{64\pi}{3}$

解析

由题意，将直三棱柱ABC - $A_1B_1C_1$补成长方体，如图所示，



则该长方体的体对角线为

$\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}=4$，

设长方体的外接球的半径为R，则$2R=4$，$R=2$，

所以该长方体的外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{32\pi}{3}$.

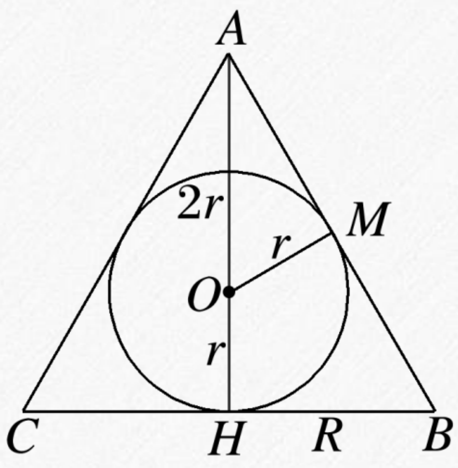
3.若圆锥的高等于其内切球半径长的 3 倍，则圆锥侧面积与球的表面积的比值为

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{3}{2}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{4}{3}$

解析

设球的半径为r，则圆锥的高为$3r$，

设圆锥的底面圆的半径为R，则圆锥的轴截面如图所示，



设球心为点 O，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOM$ 中，$\angle AMO=90°$，$OM=r$，$AO=AH-OH=2r$，$\sin\angle OAM=\dfrac{OM}{AO}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle OAM=30°$，$\therefore R=AH\cdot\tan\angle OAM=\sqrt{3}r$，则 $AB=2R=2\sqrt{3}r$，

则圆锥的侧面积为 $S_1=\pi R\cdot 2R=\pi\times\sqrt{3}r\times 2\sqrt{3}r=6\pi r^2$，球 O 的表面积为 $S_2=4\pi r^2$，

因此，圆锥的侧面积与球的表面积的比值为$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{6\pi r^2}{4\pi r^2}=\dfrac{3}{2}$.

4.有一个圆锥与一个圆柱的底面半径相等，且圆锥的母线与底面所成角为60°，若圆柱的外接球的表面积是圆锥的侧面积的4倍，则圆柱的高是其底面半径的

A.$\sqrt{2}$倍　　B.2 倍　　C.$2\sqrt{2}$倍　　D.3 倍

解析

设圆柱的高为h，底面半径为r，圆柱的外接球的半径为R，

则 $R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2$.

因为圆锥的母线与底面所成角为60°，所以母线长$l=2r$.

所以圆锥的侧面积为$\pi lr=2\pi r^2$，

所以 $4\pi R^2=4\pi\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2\right]=4\times 2\pi r^2$,

所以$\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2=2r^2$，所以 $h^2=4r^2$，所以$\frac{h}{r}=2$.

5.将半径为 3，圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形围成一个圆锥，则该圆锥的内切球的体积为

A.$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$　　B.$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　C.$\frac{4\pi}{3}$　　D.2π

解析

设圆锥的底面半径为r，高为h，

则 $2\pi r=\frac{2\pi}{3}\times 3$，解得 $r=1$，$h=\sqrt{3^2-1}=2\sqrt{2}$，

设内切球的半径为 R，则$\frac{R}{2\sqrt{2}-R}=\frac{1}{3}$，

$\therefore R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

6.(多选)正四棱锥$P-ABCD$的底面积为3，外接球的表面积为8π，则正四棱锥$P-ABCD$的体积为

A.$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ B.$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C.$2\sqrt{2}$ D.$\sqrt{2}$

解析

因为正四棱锥$P-ABCD$的底面积为3，

所以底面边长为$\sqrt{3}$，

因为外接球的表面积为8π，

所以球的半径 $r=\sqrt{2}$.连接 AC，BD 交于点 O(图略).

①当球心在线段PO上时，

计算得 $PO=r+\sqrt{r^2-OA^2}=\sqrt{2}+\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为$\frac{1}{3}\times 3\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$；

解析

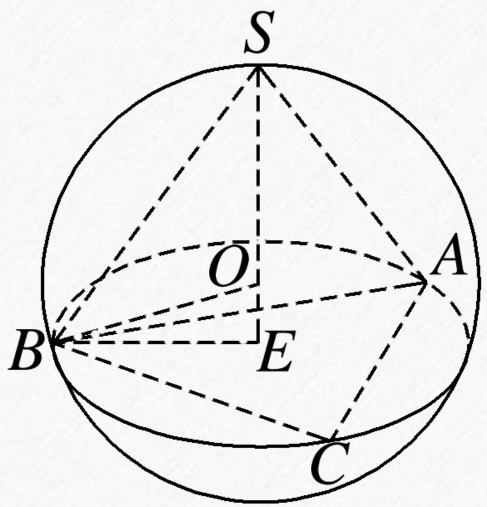
②当球心在线段PO的延长线上时，

计算得 $PO=r-\sqrt{r^2-OA^2}=\sqrt{2}-\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为$\frac{1}{3}\times 3\times \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.已知正三棱锥$S-ABC$的侧棱长为$4\sqrt{3}$，底面边长为6，则该正三棱锥外接球的表面积是___64π___.

解析



取△ABC的中心为E，连接SE，记球心为O.

如图，设球O的半径为R，

∵在正三棱锥 $S-ABC$ 中，底面边长为 6，侧棱长为 $4\sqrt{3}$，

$\therefore BE=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=2\sqrt{3}$，

$\therefore SE=\sqrt{SB^2-BE^2}=6$.

∵球心O到四个顶点的距离相等，均等于该正三棱锥外接球的半径，

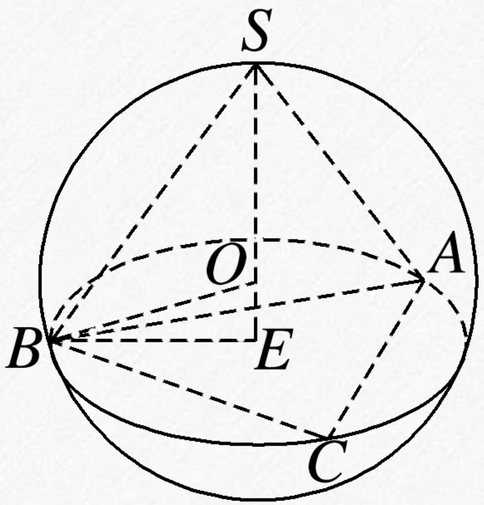
解析

$\therefore OB=R$，$OE=6-R$.

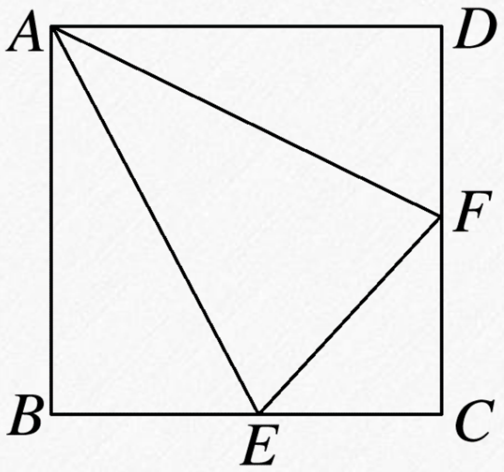
在Rt△BOE中，$OB^2=BE^2+OE^2$，

即$R^2=12+(6-R)^2$，解得$R=4$，

$\therefore$外接球的表面积为$S=4\pi R^2=64\pi$.

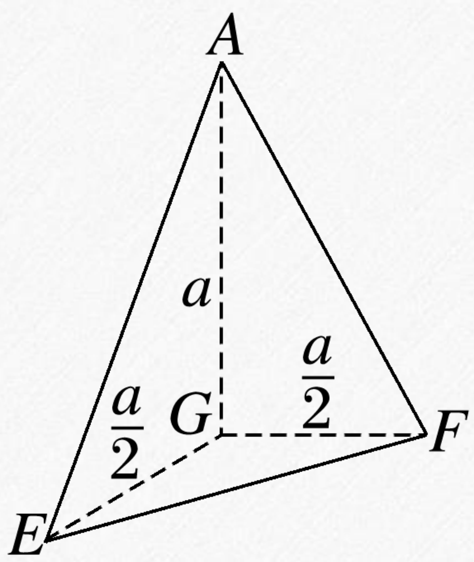


8.如图，在正方形$ABCD$中，E，F分别是BC，CD的中点，沿AE，EF，AF把这个正方形折成一个四面体，使B，C，D三点重合，重合后的点记为G.若四面体$A-EFG$外接球的表面积为$\frac{\pi}{4}$，则正方形$ABCD$的边长为$\underline{\quad \frac{\sqrt{6}}{6} \quad}$.



解析

由题意，折叠后的四面体$A-EFG$如图所示，



设正方形边长为a，四面体$A-EFG$外接球的半径为r，

则 $AG=a$，$EG=FG=\frac{a}{2}$，

易知在折叠后的四面体$A-EFG$中，GA，GE，GF两两垂直，

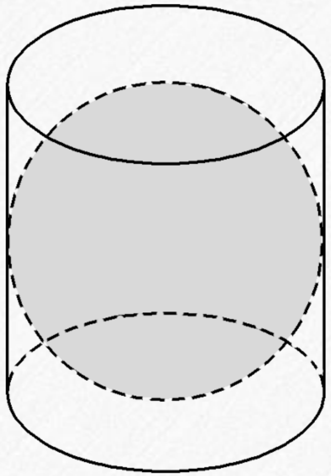
所以四面体$A-EFG$的外接球半径

$r=\frac{\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}a$，由 $4\pi r^2=\frac{\pi}{4}$，解得 $r=\frac{1}{4}$，

所以 $a=\frac{4}{\sqrt{6}}r=\frac{4}{\sqrt{6}}\times\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

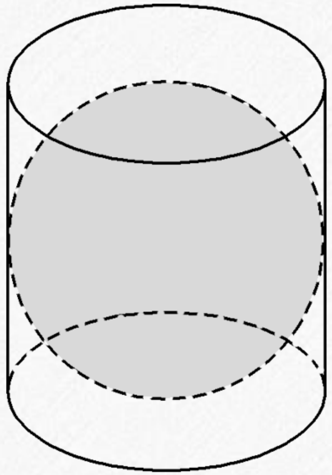
9.如图是古希腊数学家阿基米德的墓碑文，墓碑上刻着一个圆柱，圆柱内有一个内切球，这个球的直径恰好与圆柱的高相等.相传这个图形表达了阿基米德最引以为豪的发现.我们来重温这个伟大发现.

(1)求圆柱的体积与球的体积之比；



解

设圆柱的高为h，底面半径为r，球的半径为R，由已知得$h=2R$，$r=R$，



$\therefore V_{圆柱}=\pi r^2h=2\pi R^3$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$，

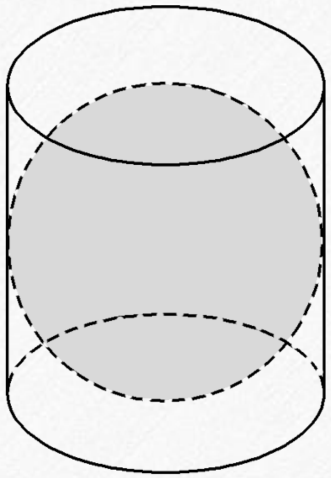
$\therefore \frac{V_{圆柱}}{V_{球}}=\frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{3}{2}$.

(2)求圆柱的表面积与球的表面积之比.

解

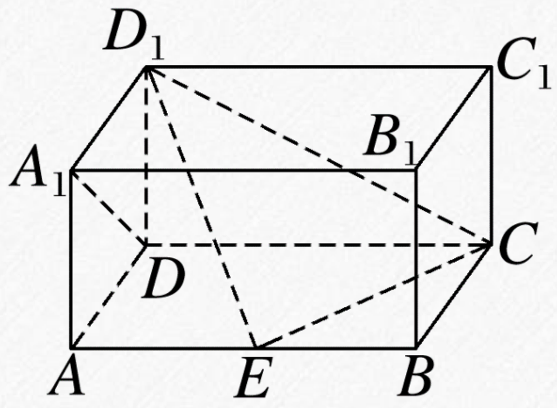
$\because S_{圆柱}=S_{侧}+2S_{圆}=2\pi rh+2\pi r^2=6\pi r^2$，

$S_{球}=4\pi r^2$，$\therefore \frac{S_{圆柱}}{S_{球}}=\frac{6\pi r^2}{4\pi r^2}=\frac{3}{2}$.



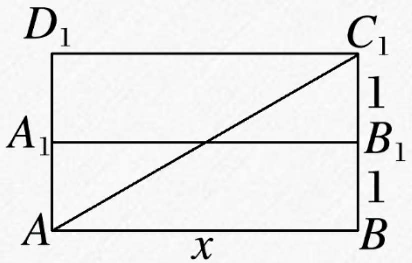
10.如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AD=AA_1=1$，$AB>1$，点E在棱AB上移动，小蚂蚁从点A沿长方体的表面爬到点C_1，所爬的最短路程为$2\sqrt{2}$.

(1)求AB的长度；



解

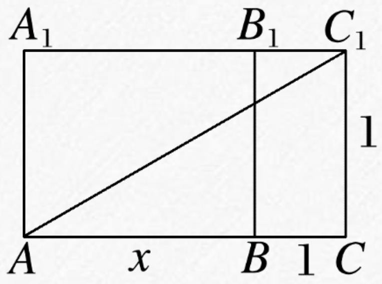
设$AB=x$，点A到点C_1的最短路程有两种可能，



图甲

如图甲的最短路程为 $AC_1=\sqrt{x^2+4}$.

如图乙的最短路程为



图乙

$AC_1=\sqrt{(x+1)^2+1}=\sqrt{x^2+2x+2}$，

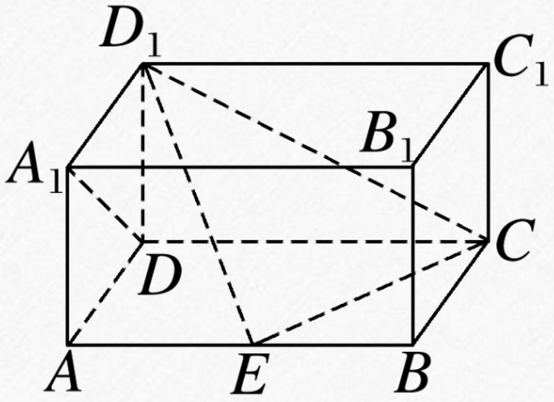
$\because x>1$，$\therefore x^2+2x+2>x^2+2+2=x^2+4$，

故从点 A 沿长方体的表面爬到点 C_1 的最短距离为$\sqrt{x^2+4}$.

由题意得$\sqrt{x^2+4}=2\sqrt{2}$，解得 $x=2$.

即AB的长度为2.

(2)求该长方体外接球的表面积.



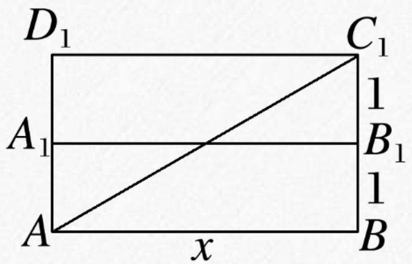
解

设长方体外接球的半径为R，则

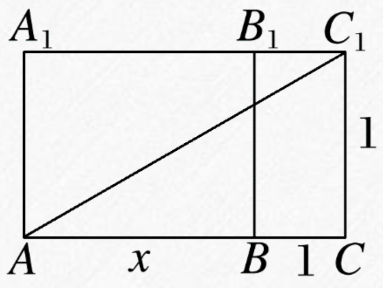
$(2R)^2=1^2+1^2+2^2=6$，

$\therefore R^2=\frac{3}{2}$，$\therefore S=4\pi R^2=6\pi$，

即该长方体外接球的表面积为6π.



图甲



图乙